سامانه بانک تستی

FlowRax

ریاضی

Math

@Flow_KonKour

@LoPRax_KonKour

کلیک کن و با ما همراه شو!

۱ ابتدا دقت کنید که باید $f(۴)=۳$ باشد:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۴+۲h)-۳}{h}=۲f'(۴)=\frac{۳}{۲}\Rightarrow f'(۴)=\frac{۱}{۲}$$

مقدار $f'(۴)$ همان شیب خط مماس است.

معادله خط مماس : $y=\frac{۱}{۲}x+۱$

$$\begin{cases}y_A=۲\Rightarrow ۲=\frac{۱}{۲}x_A+۱\Rightarrow x_A=۲\\ x_B=۸\Rightarrow y_B=\frac{۱}{۲}x_B+۱=۵\end{cases}\Rightarrow y_B-x_A=۳$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲

$$\lim_{x\to a}\frac{(f(x)-f(a))\overbrace{(\sqrt{x}+\sqrt{a})}^{۲\sqrt{a}}}{x-a}=۲\sqrt{a}f'(a)=\frac{۳}{۲}\sqrt{a}\Rightarrow f'(a)=\frac{۳}{۴}$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(a)-f(a-۲h)}{h}=-\lim_{h\to ۰}\frac{f(a-۲h)-f(a)}{h}=-(-۲f'(a))=۲f'(a)=۲\times\frac{۳}{۴}=\frac{۳}{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳ فرض کنید $f^{-۱}(x)=ax+b$ باشد، پس $f^{-۱}(۲x)=۲ax+b$ در واقع شیب خط مماس بر تابع $f^{-۱}(۲x)$ برابر $۲a$ است.

حاصل حد داده شده همان تعریف مشتق $f^{-۱}(۲x)$ و همان شیب مماس بر آن است. پس:

$$\begin{cases}۲a=۶\\ f^{-۱}(۲)=۵\Rightarrow ۲a+b=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۳\\ b=-۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=۳x-۱\Rightarrow f(x)=\frac{x+۱}{۳}$$

$$\Rightarrow f(۲)-f'(۲)=۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴ چون خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $x=-۲$ از نقاط $(-۲,\frac{۳}{۲})$ و $(۰,۴)$ می‌گذرد، شیب خط مماس برابر است با: $m=\frac{۴-\frac{۳}{۲}}{۰+۲}=\frac{۵}{۴}$، پس $f'(-۲)=\frac{۵}{۴}$.

از طرفی، حاصل حد مطلوب برابر است با:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۲)-f(-۲-h)}{۲h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۲-h)-f(-۲)}{-۲h}=\frac{۱}{۲}\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۲-h)-f(-۲)}{-h}$$

با فرض $t=-h$ خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۲-h)-f(-۲)}{-h}=\frac{۱}{۲}\lim_{t\to ۰}\frac{f(-۲+t)-f(-۲)}{t}=\frac{۱}{۲}f'(-۲)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۴}=\frac{۵}{۸}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵ گزاره الف، صحیح است، زیرا در نقطهٔ c هر دو مقدار $f(x)$ و $f'(x)$ مثبت و در نقطهٔ h هر دو مقدار $f(x)$ و $f'(x)$ منفی هستند (در نقاطی که تابع f صعودی اکید است، مقدار مشتق، مثبت و در نقاطی که تابع f نزولی اکید است مشتق تابع، منفی است.)

گزاره ب، صحیح است،زیرا در بازهٔ $(\cdot,d)$ مشتق مثبت و در بازهٔ (d,i) مشتق منفی و در بازهٔ (i,j) مشتق مثبت است، پس علامت مشتق تابع، دو بار عوض می‌شود.

گزاره پ، صحیح است، زیرا در بازهٔ (g,j) شیب خطوط مماس بر منحنی در حال افزایش هستند، پس مقدار مشتق تابع در این بازه در حال افزایش است.

گزاره ت، صحیح است، زیرا در بازهٔ (a,b) تابع f، تابع ثابت است و در بی‌شمار نقطه از این بازه، مشتق تابع برابر صفر است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(۲x-۲)(۳x-۲)...(nx-۲)}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲}(۲x-۲)(۳x-۲)...(nx-۲)=۲\times ۴\times ۶\times ...\times(۲n-۲)=۲\times(۲\times ۲)\times(۲\times ۳)\times ...\times(۲(n-۱))=۲^{n-۱}\times(n-۱)!$$

$$۲^{n-۱}\times(n-۱)!=۲^{۱۱}\times ۱۶!=۲^{۱۱}\times ۱۶\times ۱۵!=۲^{۱۵}\times ۱۵!\Rightarrow n-۱=۱۵\Rightarrow n=۱۶ :\text{طبق فرض}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷ توجه کنید که:

$$f(۲)=۴[-۲]-۴\times ۲=-۱۶$$

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(-۳x^۲-۴x)=-۳\times ۴-۴\times ۲=-۲۰$$

$$\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(-۲x^۲-۴x)=-۲\times ۴-۴\times ۲=-۱۶$$

بنابراین تابع f در $x=۲$ پیوستگی چپ دارد ولی پیوستگی راست ندارد. در نتیجه در این نقطه مشتق راست هم ندارد. از طرف دیگر:

$$x\to ۲^-\Rightarrow f(x)=-۲x^۲-۴x\Rightarrow f'(x)=-۴x-۴\Rightarrow f'_-(۲)=-۱۲$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸ توجه کنید که:

$$f'(x)=\frac{۳}{۳\sqrt[۳]{(x+۱)^۲}}-\frac{۱}{(x+۱)^۲}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\sqrt[۳]{(x+۱)^۲}=(x+۱)^۲\Rightarrow(x+۱)^۲=(x+۱)^۶$$

$$\xrightarrow{x\neq -۱}(x+۱)^۴=۱\Rightarrow\begin{cases}x+۱=۱\Rightarrow x=۰\\ x+۱=-۱\Rightarrow x=-۲\end{cases}$$

بنابراین در نقاط $x=۰$ و $x=-۲$ خطوط مماس بر نمودار تابع f، افقی هستند.

معادلهٔ این خطوط به صورت زیر است:

$$y=f(۰)=۳+۱=۴$$

$$y=f(-۲)=-۳-۱=-۴$$

پس فاصلهٔ این خط‌ها از یکدیگر برابر ۸ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹ تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است. پس در این نقطه پیوسته است، بنابراین:

$$\begin{cases} f(۲)=\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}(ax^۳+\frac{b}{x})=۸a+\frac{b}{۲} \\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}(x^۲-ax+c)=۴-۲a+c \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۸a+\frac{b}{۲}=۴-۲a+c\Rightarrow ۲۰a+b=۸+۲c \quad (۱)$$

از طرف دیگر، مشتق چپ و مشتق راست تابع f در $x=۲$ با هم برابرند. پس:

$$x\geq ۲\Rightarrow f'(x)=۳ax^۲-\frac{b}{x^۲}\Rightarrow f'_+(۲)=۱۲a-\frac{b}{۴}$$

$$x\leq ۲\Rightarrow f'(x)=۲x-a\Rightarrow f'_-(۲)=۴-a$$

$$\Rightarrow ۱۲a-\frac{b}{۴}=۴-a\Rightarrow ۴۸a-b=۱۶-۴a\Rightarrow ۵۲a-b=۱۶ \quad (۲)$$

همچنین مشتق تابع f در $x=۲$ برابر ۳ است. پس:

$$f'(۲)=۴-a=۳\Rightarrow a=۱$$

بنابراین از (۲) نتیجه می‌شود: $۵۲-b=۱۶\Rightarrow b=۳۶$

و از (۱) نتیجه می‌شود: $۲۰+۳۶=۸+۲c\Rightarrow c=۲۴$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰ توجه کنید که:

$$۱۲+f'(a)g(a)=-f(a)g'(a)$$
$$f'(a)g(a)+f(a)g'(a)=-۱۲\Rightarrow (f\times g)'(a)=-۱۲$$

از طرف دیگر:

$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=\frac{۲x^۲-۳x+۱}{x^۲+۳x+۱}\times\frac{۲x^۲+۶x+۲}{x^۲-۳x+۲}=\frac{(x-۱)(۲x-۱)}{x^۲+۳x+۱}\times\frac{۲(x^۲+۳x+۱)}{(x-۱)(x-۲)}=\frac{۴x-۲}{x-۲}$$

$$\Rightarrow (f\times g)'(x)=\frac{۴(x-۲)-(۴x-۲)}{(x-۲)^۲}=\frac{-۶}{(x-۲)^۲}\Rightarrow (f\times g)'(a)=\frac{-۶}{(a-۲)^۲}$$

بنابراین:

$$\frac{-۶}{(a-۲)^۲}=-۱۲\Rightarrow (a-۲)^۲=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a-۲=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow a=۲\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱ توجه کنید که $f(۰)=۰$ و

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-۱)}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x}{\sqrt{x}-۱}=\frac{۰}{۰-۱}=۰$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x\sqrt{-x}}{x-\sqrt{-x}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x\sqrt{-x}}{-\sqrt{-x}(\sqrt{-x}+۱)}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x}{-\sqrt{-x}-۱}=\frac{۰}{۰-۱}=۰$$

بنابراین تابع f در $x=۰$ پیوسته است. از طرف دیگر:

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{x\sqrt{|x|}}{x-\sqrt{|x|}}}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{|x|}}{x-\sqrt{|x|}}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_+(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۱}{\sqrt{x}-۱}=-۱ \\ f'_-(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{-x}}{x-\sqrt{-x}}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{۱}{-\sqrt{-x}-۱}=-۱ \end{array}\right\}\Rightarrow f'(۰)=-۱$$

بنابراین تابع f در $x=۰$ مشتق‌پذیر است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲

$$f(x)=\frac{۲^x\times\sqrt[۳]{x}-۲^{x+۱}}{x-۴}=\frac{۲^x(\sqrt[۳]{x}-۲)}{x-۴}=(\sqrt[۳]{x}-۲)\times\frac{۲^x}{x-۴}$$

چون مقدار عبارت $(\sqrt[۳]{x}-۲)$ در نقطهٔ $x=۸$ برابر صفر می‌شود، پس به دلیل وجود عامل صفرشونده در تابع f می‌توانیم فقط مشتق عامل صفرشونده را محاسبه کنیم و آن را در سایر عوامل ضرب کنیم و مقدار عبارت را به ازای $x=۸$ به دست آوریم.

$$x=۸ \text{ برای نقطهٔ } f'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}\times\frac{۲^x}{x-۴}\Rightarrow f'(۸)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{۶۴}}\times\frac{۲^۸}{۴}=\frac{۱}{۱۲}\times\frac{۲^۸}{۴}=\frac{۱۶}{۳}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳ $m=۲$:شیب خط مماس $\Rightarrow y=۲x+k$:معادله خط مماس

چون مقدار مشتق به ازای طول نقطه تماس برابر است با شیب خط مماس، پس داریم:

$$f'(x)=۲x-۲\Rightarrow ۲x-۲=۲\Rightarrow x=۲ \text{ طول نقطهٔ تماس}$$

نقطهٔ تماس نقطه‌ای مشترک روی خط و منحنی است، پس باید مختصات آن، هم در خط و هم در منحنی صدق کند، بنابراین داریم:

$$۴-۴+۲k-۱=۴+k\Rightarrow k=۵$$

$$\Rightarrow f(x)=x^۲-۲x+۹\Rightarrow f'(x)=۲x-۲\Rightarrow f'(-۲)=-۶$$

$x=-۲$ شیب مماس بر منحنی در نقطهٔ $m'=-۶$, مختصات نقطه تماس $A\begin{vmatrix}-۲\\ ۱۷\end{vmatrix}$

$x=-۲$ معادله خط مماس بر منحنی در نقطه : $y-۱۷=-۶(x+۲)\Rightarrow y=-۶x+۵$

عرض از مبدأ $=۵$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

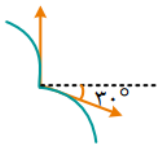
۱۴

$$f'(۴)=\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}=\lim_{x\to ۴}\frac{(\sqrt{x}-۲)\tan\frac{\pi}{x}-۰}{x-۴}\times\frac{\sqrt{x}+۲}{\sqrt{x}+۲}=\lim_{x\to ۴}\frac{(x-۴)\tan\frac{\pi}{x}}{(x-۴)(\sqrt{x}+۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{\tan\frac{\pi}{x}}{\sqrt{x}+۲}=\frac{\tan\frac{\pi}{۴}}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵



شیب نیم‌مماس راست $-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ و شیب نیم‌مماس چپ $-\infty$ است. می‌دانیم: $\tan(-\frac{\pi}{۶})=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ و $\tan(\frac{\pi}{۲}^{+})=-\infty$، پس:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶

در حد داده شده مخرج به صفر میل می‌کند، برای اینکه حاصل حد موجود باشد، باید صورت هم به صفر میل کند، پس حد تابع در $x=۳$ برابر ۴ است و چون تابع پیوسته است، $f(۳)=۴$ است، پس:

$$-\frac{۱}{۲}\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-۴}{h}=-\frac{۱}{۲}\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}=-\frac{۱}{۲}f'(۳)=۱\Rightarrow f'(۳)=-۲$$

پس خط مماس از نقطه $(۳,۴)$ عبور می‌کند و دارای شیب -۲ است:

$$y-۴=-۲(x-۳)\Rightarrow y=-۲x+۱۰\Rightarrow A(۰,۱۰),B(۵,۰)$$

$$\Rightarrow S=\frac{۵\times ۱۰}{۲}=۲۵$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷

$$x=\sqrt{۵},\sqrt{۶},\sqrt{۷},\sqrt{۸}\Rightarrow[x]=۲$$

$$\Rightarrow f(x)=۲x^{۳}+۵x\Rightarrow f'(x)=۶x^{۲}+۵$$

$$\Rightarrow f'(\sqrt{۵})=۶\times ۵+۵$$

$$\Rightarrow f'(\sqrt{۶})=۶\times ۶+۵$$

$$\Rightarrow f'(\sqrt{۷})=۶\times ۷+۵$$

$$\Rightarrow f'(\sqrt{۸})=۶\times ۸+۵$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع}}۶(۵+۶+۷+۸)+۲۰=۱۷۶$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸

می‌دانیم $f'(۱)=-۳$، حال از تابع y مشتق می‌گیریم:

$$y'=(\frac{۲}{۲\sqrt{۲x-۷}}-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}})f'(\sqrt{۲x-۷}-\sqrt[۳]{x})$$

$$\Rightarrow x=۸\Rightarrow y'=(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۱۲})f'(۳-۲)=\frac{۱}{۴}f'(۱)=-\frac{۳}{۴}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹ معادله تساوی خط و سهمی باید دارای ریشه مضاعف باشد:

$$f(x) \text{ سهمی}: x^۲-۴x+۱=۲x+b \Rightarrow x^۲-۶x+۱-b=۰ (*) \Rightarrow \Delta=۰$$

$$\Rightarrow ۳۶-۴(۱)(۱-b)=۰ \Rightarrow b=-۸ \xrightarrow{(*)} x^۲-۶x+۹=۰$$

$$\Rightarrow (x-۳)^۲=۰ \Rightarrow x=۳ \Rightarrow y=۲x-۸=-۲ \Rightarrow A(۳,-۲)$$

$$g(x) \text{ سهمی}: -x^۲+x+a=۲x-۸ \Rightarrow x^۲+x-a-۸=۰ (**) \Rightarrow \Delta=۰$$

$$\Rightarrow ۱-۴(۱)(-a-۸)=۰ \Rightarrow a+۸=-\frac{۱}{۴} \xrightarrow{(**)} x^۲+x+\frac{۱}{۴}=۰$$

$$\Rightarrow (x+\frac{۱}{۲})^۲=۰ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow y=۲x-۸ \Rightarrow y=-۹$$

$$\Rightarrow B(-\frac{۱}{۲},-۹)$$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{(\frac{۷}{۲})^۲+(۷)^۲}=\frac{۷\sqrt{۵}}{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰

$$\frac{f(b)-f(۱)}{b-۱}=\frac{۱}{۹} \Rightarrow \frac{\sqrt{b}-۱}{b-۱}=\frac{۱}{۹} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{b}+۱}=\frac{۱}{۹} \Rightarrow \sqrt{b}=۸ \Rightarrow b=۶۴$$

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}=\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}} \Rightarrow f''(x)=-\frac{۱}{۴}x^{-\frac{۳}{۲}}=\frac{-۱}{۴x\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow f''(۶۴)=\frac{-۱}{۴\times ۶۴\times \sqrt{۶۴}}=\frac{-۱}{۲^{۱۱}}=-۲^{-۱۱}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱ تابع باید در $x=a$ پیوسته و مشتق‌پذیر باشد:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a) \Rightarrow ۲a-۱=\frac{-۸}{a}-b \ (I)$$

تساوی مشتق‌های چپ و راست:

$$f'_+(a)=f'_-(a) \Rightarrow ۲=\frac{۸}{a^۲} \Rightarrow a^۲=۴ \Rightarrow a=\pm ۲$$

اگر $a=۲$ باشد، تابع $-\frac{۸}{x}-b$ در $x=۰$ مشتق‌ناپذیر خواهد بود، پس $a=-۲$ صحیح است:

$$a=-۲ \xrightarrow{(I)} -۵=۴-b \Rightarrow b=۹$$

$$y=-\frac{۸}{x}-۹ \xrightarrow{x=-۴} A(-۴,-۷)$$

$$y'=\frac{۸}{x^۲} \xrightarrow{x=-۴} y'=\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله خط}} y+۷=\frac{۱}{۲}(x+۴) \Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x-۵$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲

$$f'_+(-۱)=\lim_{x\to -۱^+}\frac{۴x+۱-\frac{۱}{۲}}{x+۱}=\frac{-\frac{۷}{۲}}{۰^+}=-\infty$$

$$f'_-(-۱)=\lim_{x\to -۱^-}\frac{\frac{۱}{\sqrt{x+۵}}-\frac{۱}{۲}}{x+۱}=\lim_{x\to -۱^-}\frac{۲-\sqrt{x+۵}}{۲(x+۱)\sqrt{x+۵}}\times\frac{۲+\sqrt{x+۵}}{۲+\sqrt{x+۵}}$$

$$=\lim_{x\to -۱^-}\frac{۴-x-۵}{۲(x+۱)(\sqrt{x+۵})(۲+\sqrt{x+۵})}=\lim_{x\to -۱^-}\frac{-(x+۱)}{۲(x+۱)(\sqrt{x+۵})(۲+\sqrt{x+۵})}=\frac{-۱}{۲(۲)(۴)}=-\frac{۱}{۱۶}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳

عبارت مورد سوال همان $(fg)'(۴)$ است، پس ابتدا f و g را در هم ضرب می‌کنیم:

$$(fg)(x)=\frac{(\sqrt{x+۳}+\sqrt{x})(\sqrt{x+۳}-\sqrt{x})}{x\sqrt{x}}=\frac{x+۳-x}{x\sqrt{x}}=\frac{۳}{x\sqrt{x}}=\frac{۳}{x^{\frac{۳}{۲}}}=۳x^{-\frac{۳}{۲}}$$

$$\Rightarrow (fg)'(x)=-\frac{۹}{۲}x^{-\frac{۵}{۲}}=\frac{-۹}{۲x^۲\sqrt{x}}\Rightarrow (fg)'(۴)=\frac{-۹}{۲\times ۱۶\sqrt{۴}}=-\frac{۹}{۶۴}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴

شیب خط مماس بر f در نقطه $x=۱$ برابر ۲ است. تابع خطی g بر این خط عمود است. بنابراین شیب آن برابر $-\frac{۱}{۲}$ است. g از نقطهٔ $(۰,-۲)$ عبور می‌کند. در نتیجه:

$$g\text{ معادلهٔ }: y-(-۲)=-\frac{۱}{۲}(x-۰)\Rightarrow g(x)=-\frac{x}{۲}-۲\Rightarrow g(۱)=-\frac{۵}{۲}$$

برای محاسبهٔ مشتق $y=\frac{f}{|g|}$ در $x=۱$، $f(x)$ عامل صفرکننده است. بنابراین:

$$y'(۱)=\frac{f'(۱)}{|g(۱)|}=\frac{۲}{\left|-\frac{۵}{۲}\right|}=\frac{۴}{۵}=۰/۸$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۵

آهنگ متوسط تابع درجهٔ دوم در فاصلهٔ $\left[\frac{۱}{۳},\frac{۵}{۳}\right]$ با آهنگ لحظه‌ای آن در نقطهٔ وسط بازه یعنی $x=۱$ برابر است. بنابراین: $f'(۱)=۳$

خواهیم داشت:

$$\left(f(\sqrt[۳]{x^۲})\right)'=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}f'(\sqrt[۳]{x^۲})\xrightarrow{x=۱}\frac{۲}{۳}f'(۱)=\frac{۲}{۳}\times ۳=۲$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶

ابتدا ضابطه تابع را ساده کرده، سپس مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\frac{x^۲-\sqrt[۳]{x^۴}}{۱-\sqrt[۳]{x^۲}}=\frac{\sqrt[۳]{x^۴}(\sqrt[۳]{x^۲}-۱)}{۱-\sqrt[۳]{x^۲}}=-\sqrt[۳]{x^۴}=-x^{\frac{۴}{۳}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=-\frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}}\Rightarrow f'(\frac{۱}{۸})=-\frac{۴}{۳}(\frac{۱}{۸})^{\frac{۱}{۳}}=-\frac{۴}{۳}\times\frac{۱}{۲}=-\frac{۲}{۳}$$

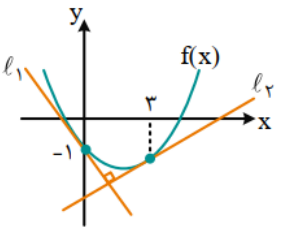
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۷

$$g(x)=f(x^۲-۱)\Rightarrow g'(x)=۲xf'(x^۲-۱)\Rightarrow g'(-۱)=-۲f'(۰)=۳\Rightarrow f'(۰)=-\frac{۳}{۲}$$

شیب خط $\ell_۱$ برابر $-\frac{۳}{۲}$ است، بنابراین شیب خط $\ell_۲$ برابر $\frac{۲}{۳}$ است، یعنی $f'(۳)=\frac{۲}{۳}$

خواهیم داشت:



$$g'(x)=۲xf'(x^۲-۱)\Rightarrow g'(۲)=۴f'(۳)=\frac{۸}{۳}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۸

فرض کنیم سهمی محور طول‌ها را در α و β قطع کرده باشد.

از طرفی: $f'(x)=۲x+a$، پس می‌توان نوشت:

$$\Rightarrow f'(\alpha).f'(\beta)=-۱\Rightarrow(۲\alpha+a)(۲\beta+a)=-۱\Rightarrow ۴\alpha\beta+۲a(\alpha+\beta)+a^۲=-۱$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-a\\ \alpha\beta=۲\end{cases}\Rightarrow ۸-۲a^۲+a^۲=-۱\Rightarrow a^۲=۹\Rightarrow a=\pm۳$$

$$\text{رأس } x=\pm\frac{۳}{۲}\qquad \text{عرض رأس}=f(\pm\frac{۳}{۲})=\frac{۹}{۴}-\frac{۹}{۲}+۲$$

$$\text{عرض رأس سهمی}=-\frac{۱}{۴}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۹

$$\begin{cases}g(x)=-x+۳\Rightarrow g^{-۱}(x)=-x+۳\\ g(x)+g^{-۱}(x)=-۲x+۶\end{cases}$$

$$\begin{cases}f(x)=\frac{۳}{۲}x+۳\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۲}{۳}(x-۳)=\frac{۲}{۳}x-۲\\ f(x)-f^{-۱}(x)=\frac{۵}{۶}x+۵\end{cases}$$

$$\Rightarrow y=\frac{g+g^{-۱}}{f-f^{-۱}}=\frac{-۲x+۶}{\frac{۵}{۶}x+۵}\Rightarrow y'(x)=\frac{-۱۰-۵}{(\frac{۵}{۶}x+۵)^۲}$$

$$\Rightarrow y'(۰)=\frac{-۱۵}{۲۵}=\frac{-۳}{۵}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰

گزارهٔ الف نادرست است، زیرا به دلیل عدم وجود پیوستگی چپ تابع f در نقطهٔ $x=۵$، تابع f در نقطهٔ $x=۵$ مشتق چپ ندارد. دلیل عدم وجود پیوستگی چپ تابع f در نقطهٔ $x=۵$، این است که حد چپ تابع f در نقطهٔ $x=۵$ با $f(۵)$ برابر نیست.

$$\lim_{x\to۵^-}f(x)=۴\times(۲۵+۵+۱)=۱۲۴\qquad f(۵)=۵\times(۲۵+۵+۱)=۱۵۵$$

گزارهٔ ب درست است، زیرا:

$$f'(۰)=\lim_{x\to۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to۰}\frac{\sqrt[۵]{x}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to۰}\frac{۱}{\sqrt[۵]{x^۴}}=+\infty$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=۰$ پیوسته است و مشتق‌های چپ و راست تابع f در نقطهٔ $x=۰$، هر دو $+\infty$ هستند، پس تابع f در نقطهٔ $x=۰$، مماس قائم دارد.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱ چون تابع f در نقطهٔ $x=۳$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه، پیوسته است÷ و مشتق‌های چپ و راست تابع در این نقطه با هم برابر خواهند بود.

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x) = ۹a+۱۱$$

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x) = \frac{b}{۱} = b \Rightarrow ۹a+۱۱=b \quad (۱)$$

$$f'(x)=\begin{cases} ۲ax+۴ & x>۳ \\ \dfrac{-b}{(x-۲)^۲} & x<۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} f'_+(۳)=۶a+۴ \\ f'_-(۳)=-b \end{matrix} \Rightarrow ۶a+۴=-b \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} ۹a+۱۱+۶a+۴=۰ \Rightarrow ۱۵a=-۱۵ \Rightarrow a=-۱$$

$$\Rightarrow b=۲ \Rightarrow f(x)=\begin{cases} -x^۲+۴x-۱ & x\geq ۳ \\ \dfrac{۲}{x-۲} & x<۳ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x<۳} f'(x)=\frac{-۲}{(x-۲)^۲} \Rightarrow f''(x)=\frac{-۲(-۲)(x-۲)}{(x-۲)^۴}=\frac{۴}{(x-۲)^۳}$$

$$\Rightarrow f''(-۲)=\frac{۴}{(-۴)^۳}=\frac{۴}{-۶۴}=\frac{-۱}{۱۶}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲ $f(x)=-۴x^۳+۱۲x^۲+۹x-۱ \Rightarrow f'(x)=-۱۲x^۲+۲۴x+۹$

بیشترین مقدار آهنگ تغییرات لحظه‌ای تابع f، به معنای بیشترین مقدار تابع $f'(x)$ است و چون $f'(x)$ تابعی از درجه دوم است، بیشترین مقدار آن در نقطهٔ رأس سهمی اتفاق می‌افتد. پس خواهیم داشت:

$$f'(x)=-۱۲x^۲+۲۴x+۹ \Rightarrow x_{max}=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۲۴}{-۲۴}=۱$$

بنابراین بیشترین مقدار آهنگ تغییرات لحظه‌ای تابع f در نقطهٔ $x=۱$ رخ می‌دهد. حال می‌خواهیم آهنگ تغییرات متوسط تابع f را در بازهٔ $[۱,۲]$ محاسبه کنیم که خواهیم داشت:

$$\text{آهنگ تغییرات متوسط تابع در بازهٔ } [۱,۲] = \frac{f(۲)-f(۱)}{۲-۱}=\frac{۳۳-۱۶}{۱}=۱۷$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳ شیب دو خط مماس که هر دو با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ۴۵° می‌سازند، برابر $\tan ۴۵^\circ = ۱$ است، پس باید نقاطی را بیابیم که در آن‌ها مقدار مشتق برابر ۱ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$f(x)=\frac{۴x}{x+۱} \Rightarrow f'(x)=\frac{۴(x+۱)-۴x}{(x+۱)^۲}=\frac{۴}{(x+۱)^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{(x+۱)^۲}=۱ \Rightarrow (x+۱)^۲=۴ \Rightarrow x+۱=\pm ۲ \Rightarrow x=-۳ \ , \ x=۱$$

پس این نقاط دارای مختصات $A(-۳,۶)$ و $B(۱,۲)$ هستند و معادلات دو خط مماس به صورت زیر خواهند بود:

$$d_۱ : y-۶=۱(x+۳) \Rightarrow y=x+۹ \Rightarrow x-y+۹=۰$$

$$d_۲ : y-۲=۱(x-۱) \Rightarrow y=x+۱ \Rightarrow x-y+۱=۰$$

حال فاصلهٔ این دو خط موازی برابر است با:

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۹-۱|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۸}{\sqrt{۲}}=۴\sqrt{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۴

$$f(x)=\frac{x}{x-1}\Rightarrow fof(x)=f\big(f(x)\big)=f(\frac{x}{x-1})=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}$$

$$fof(x)=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}}\Rightarrow fof(x)=x\Rightarrow fofof(x)=f(x)$$

پس خواهیم داشت: $f'(x)=\frac{1(x-1)-1(x)}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(2)=-1$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۵

$$g(x)=\sqrt{x}f^2(\frac{3}{x})\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}f^2(\frac{3}{x})+2\times\frac{-3}{x^2}\times f'(\frac{3}{x})f(\frac{3}{x})\times\sqrt{x}$$

$$g'(1)=\frac{1}{2}f^2(3)-6f'(3)f(3)\ (1)$$

$$f(x)=\frac{3x^2+1}{x^2-2}\Rightarrow f'(x)=\frac{6x(x^2-2)-2x(3x^2+1)}{(x^2-2)^2}=\frac{-14x}{(x^2-2)^2}$$

$$f'(3)=\frac{-42}{49}\ ,\quad f(3)=\frac{28}{7}=4$$

اگر مقادیر به دست آمده را در رابطهٔ (۱) جایگذاری کنیم، خواهیم داشت:

$$g'(1)=\frac{1}{2}\times16-6\times\frac{-42}{49}\times4=8+\frac{1008}{49}=\frac{3920+1008}{49}=\frac{1400}{49}=\frac{200}{7}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۶

دقت شود که عبارت $f'g+g'f''$ مشتق تابع $(f'.g)$ است، یعنی داریم:

$$(f'.g)'=f''g+g'f'$$

بنابراین کافی است تابع $f'.g$ را تشکیل داده و آن را ساده کرده و در نهایت از آن مشتق بگیریم:

$$f(x)=\frac{\sqrt[4]{x^3}\sqrt[6]{x^5}}{3x}=\frac{x^{\frac{3}{4}}\times x^{\frac{5}{6}}}{3x}=\frac{x^{\frac{19}{12}}}{3x}=\frac{1}{3}x^{\frac{7}{12}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\times\frac{7}{12}x^{-\frac{5}{12}}=\frac{7}{36}x^{-\frac{5}{12}}$$

$$f'.g=\frac{7}{36}x^{-\frac{5}{12}}\times72x^{-\frac{7}{12}}=14x^{-1}=\frac{14}{x}$$

$$(f'.g)'=(\frac{14}{x})'=\frac{-14}{x^2}\Rightarrow(f'.g)'(1)=-14$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۷ حاصل حد خواسته شده برابر $-f'_-(1)$ است.

$$0 < x \le 1 \Rightarrow f(x) = \frac{2(1-x)-1}{2x+\sqrt[3]{x-2}} = \frac{1-2x}{2x+\sqrt[3]{x-2}}$$

$$f'(x) = \frac{-2(2x+\sqrt[3]{x-2}) - (2+\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}})(1-2x)}{(2x+\sqrt[3]{x-2})^2}$$

$$f'_-(1) = \frac{-2+(2+\frac{1}{3})}{1} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{جواب} = -f'_-(1) = -\frac{1}{3}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۸ ریشه‌های داخل قدرمطلق، نقاط مشتق‌ناپذیرند.

$$\begin{cases} 2a-|x+a|=0 \Rightarrow x=-a-2a, x=-a+2a \\ x+a=0 \Rightarrow x=-a \end{cases}$$

پس نقاط $-3a, a, -a$ نقاط مشتق‌ناپذیرند که جمع آن‌ها برابر $-3a$ است، پس $a=2$ است.

$$f(x)=\sqrt[3]{2x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}} \Rightarrow f'_{\pm}(-\frac{1}{2}) = +\infty$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۹ شیب خط مماس برابر ۴- است. پس:

$$f'(x) = \frac{x^2-2x-b-1}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(2) = -b-1$$

$$\Rightarrow -b-1=-4 \Rightarrow b=3$$

خط و تابع در $x=2$ بر هم مماس‌اند. پس:

$$y = a-4x = \frac{x^2+bx+1}{x-1}$$

$$x=2 \Rightarrow a-8=\frac{5+6}{1} \Rightarrow a=19$$

$$\Rightarrow a+b=22$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۰

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{5+2a-1-10a}{4} = 1-2a$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(2) = 1-\frac{10a}{4} = 1-\frac{5a}{2} \Rightarrow 1-\frac{5a}{2} = \frac{1}{2}(1-2a) \Rightarrow 2-5a = 1-2a \Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۱ توجه کنید که:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-۴}{x^۲-۴}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow \lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-۴}{x-۲}\times\frac{۱}{x+۲}=\frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow f'(۲)\times\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow f'(۲)=۳\ ,\ f(۲)=۴$$

همچنین:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{h^۲+۲h}{۳-g(۲+h)}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \lim_{h\to ۰}\frac{h}{g(۲+h)-۳}\times\frac{(h+۲)}{-۱}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{g'(۲)}\times(-۲)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow g'(۲)=-۴\ ,\ g(۲)=۳$$

بنابراین:

$$t(x)=\frac{f(x)-g(x)}{g(x)+۱}\Rightarrow t'(x)=\frac{(f'(x)-g'(x))(g(x)+۱)-g'(x)(f(x)-g(x))}{(g(x)+۱)^۲}$$

$$t'(۲)=\frac{(f'(۲)-g'(۲))(g(۲)+۱)-g'(۲)(f(۲)-g(۲))}{(g(۲)+۱)^۲}=\frac{(۳+۴)(۳+۱)+۴(۴-۳)}{(۳+۱)^۲}=\frac{۳۲}{۱۶}=۲$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۲ اگر $x\to a^+$، آن‌گاه $f(x)=(\frac{a}{x}-۱)a-(x-a)$ و در نتیجه:

$$f'(x)=a(-\frac{a}{x^۲})-۱\Rightarrow f'_+(a)=-۲$$

اگر $x\to a^-$، آن‌گاه $f(x)=(\frac{a}{x}-۱)(a-۱)+x-a$ و در نتیجه:

$$f'(x)=(a-۱)(-\frac{a}{x^۲})+۱\Rightarrow f'_-(a)=\frac{۱}{a}$$

بنابراین شیب نیم‌مماس‌های راست و چپ رسم شده بر نمودار تابع f در نقطهٔ $x=a$ به ترتیب برابر -۲ و $\frac{۱}{a}$ است. برای این که این نیم‌مماس‌ها بر هم عمود باشند، باید:

$$-۲(\frac{۱}{a})=-۱\Rightarrow a=۲$$

بنابراین:

$$f(x)=(\frac{۲}{x}-۱)[x]-|x-۲|\Rightarrow f(۱)=۱-۱=۰$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۳ $x=۲$ نقطهٔ گوشه $f(x)=(x+a)[x]$ است. بنابراین $x=۲$ ریشهٔ $x+a=۰$ می‌باشد.

$$۲+a=۰\Rightarrow a=-۲$$

خواهیم داشت:

$$g(۱-۲x)=\frac{x^۲-۴x+۳}{(x+۲)\sqrt{۳x+۱}}=\frac{(x-۱)(x-۳)}{(x+۲)\sqrt{۳x+۱}}$$

مشتق تابع را در $x=۱$ به دست می‌آوریم. $x-۱$ عامل صفرکننده عبارت سمت راست است.

$$-۲g'(۱-۲x)=(x-۱)'(\frac{x-۳}{(x+۲)\sqrt{۳x+۱}})\xrightarrow{x=۱}-۲g'(-۱)=\frac{-۲}{۳\times ۲}=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow g'(-۱)=\frac{۱}{۶}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۴ نکته: شیب خط مماس بر نمودار یک تابع در نقطه‌ای به‌طول a برابر مشتق آن تابع در a است.

ابتدا داریم:

$$۲f'(-۲)=f(-۲)=۳ \Rightarrow \begin{cases} f(-۲)=۳ \Rightarrow A(-۲,۳) \\ f'(-۲)=\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

خط d بر تابع f در نقطهٔ A مماس است، بنابراین شیب خط d همان $f'(۲)$ است.

از طرفی خط d از نقطهٔ A عبور کرده است، پس می‌توان معادلهٔ خط d را نوشت:

$$y=mx+h \xrightarrow[A(-۲,۳)]{m=\frac{۳}{۲}} y=\frac{۳}{۲}x+۶$$

اکنون مختصات نقاط B و C را به‌دست می‌آوریم:

$$x=۰ \Rightarrow y=۶ \Rightarrow C(۰,۶)$$

$$y=۰ \Rightarrow \frac{۳}{۲}x+۶=۰ \Rightarrow x=-۴ \Rightarrow B(-۴,۰)$$

$$S_{\overset{\triangle}{BOC}}=\frac{۱}{۲}\times|-۴\times۶|=۱۲$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۵ نکته: حد زیر را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطهٔ a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند:

$$f'(a)=\lim_{h\to۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

نکته: مشتق تابع f در $x=a$ برابر است با:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

با توجه به اینکه $\lim\limits_{h\to۰}\frac{f(۳+h)-۱}{۲h+h^۲}=۴$ و حد مخرج در $h=۰$ برابر صفر است، پس حد صورت نیز در $h=۰$ برابر صفر است. بنابراین:

$$\lim_{h\to۰}(f(۳+h)-۱)=۰ \Rightarrow \lim_{h\to۰}(f(۳)-۱)=۰ \xrightarrow{f\text{ پیوسته است.}} f(۳)=۱$$

اکنون داریم:

$$\lim_{h\to۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h(۲+h^۲)}=۴ \Rightarrow \lim_{h\to۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}\times\lim_{h\to۰}\frac{۱}{۲+h^۲}=۴$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف مشتق}} f'(۳)\times\frac{۱}{۲}=۴ \Rightarrow f'(۳)=۸$$

حال حاصل حد خواسته‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to۳}\frac{f^۲(x)+f(x)-۲}{x^۲-۹}=\lim_{x\to۳}\frac{(f(x)-۱)(f(x)+۲)}{(x-۳)(x+۳)}=\lim_{x\to۳}\frac{f(x)-۱}{x-۳}\times\lim_{x\to۳}\frac{f(x)+۲}{x+۳}$$

با توجه به اینکه $f(۳)=۱$ است، حد اول همان $f'(۳)$ است. بنابراین حاصل حد خواسته‌شده برابر است با:

$$f'(۳)\times\frac{f(۳)+۲}{۶}=۸\times\frac{۳}{۶}=۴$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۶ نکته (قضیه): اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f در a پیوسته است.

نکته: اگر تابع f در نقطه‌ای به‌طول a مشتق‌پذیر باشد، مشتق چپ و راست تابع در این نقطه برابر است.

تابع f در $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس تابع f در $x=۲$ پیوسته است، بنابراین:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^-} ۲ax+b = ۴a+b \\ f(۲) = \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^+} \sqrt{۲x} = ۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{شرط پیوستگی}} ۴a+b=۲ \quad (*)$$

اکنون مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\begin{cases} ۲a & ; x<۲ \\ \dfrac{۲}{۲\sqrt{۲x}} & ; x\geq ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(۲)=۲a \\ f'_+(۲)=\dfrac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow ۲a=\frac{۱}{۲} \Rightarrow a=\frac{۱}{۴} \xrightarrow{(*)} ۴(\frac{۱}{۴})+b=۲ \Rightarrow b=۱$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۷ نکته: شیب خط مماس بر نمودار یک تابع در نقطه‌ای به طول a برابر مشتق آن تابع در a است.

ابتدا عرض نقطه‌ای به طول $x=۳$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x+۱}{۲-x} \Rightarrow f(۳)=\frac{۳+۱}{۲-۳}=-۴ \Rightarrow A(۳,-۴)$$

اکنون با محاسبهٔ $f'(۳)$ شیب خط مماس را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{(۱)(۲-x)-(-۱)(x+۱)}{(۲-x)^۲} \Rightarrow f'(۱)=۳$$

حال معادلهٔ خط مماس را در نقطهٔ $A(۳,-۴)$ می‌نویسیم:

$$y-y_۰=m(x-x_۰) \xrightarrow[A(۳,-۴)]{m=۳} y+۴=۳(x-۳) \Rightarrow y=۳x-۱۳ \xrightarrow{x=۰} y=-۱۳$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۸ نکته: شیب خط مماس بر نمودار یک تابع در نقطه‌ای به‌طول a برابر مشتق آن تابع در a است.

نکته: اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه:

$$(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^{۲}} \quad ،g(a)\neq ۰$$

ابتدا معادلهٔ خط AB را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}A(-۱,۳)\\ \\ B(۵,۷)\end{cases} \Rightarrow AB\text{شیب}=\frac{۷-۳}{۵+۱}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x+\frac{۱۱}{۳}$$

خط AB در نقطه‌ای به‌طول $x=۲$ بر نمودار f مماس است. بنابراین شیب خط AB همان $f'(۲)$ است:

$$f'(۲)=\frac{۲}{۳} \ , \ f(۲)=\frac{۲}{۳}(۲)+\frac{۱۱}{۳}=۵$$

اکنون شیب خط مماس بر تابع $y=\frac{x}{f(x)}$ را با محاسبهٔ مشتق آن در $x=۲$ به‌دست می‌آوریم:

$$y'=\frac{۱\times f(x)-f'(x)\cdot x}{f^{۲}(x)} \Rightarrow y'(۲)=\frac{f(۲)-f'(۲)\times ۲}{(f(۲))^{۲}}=\frac{۵-\frac{۴}{۳}}{۲۵}=\frac{۱۱}{۷۵}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۹ نکته: اگر تابع f در $x=a$ هریک از شرایط زیر را داشته باشد، در این صورت f در این نقطه مشتق‌پذیر نیست:

۱) f در a پیوسته نباشد.

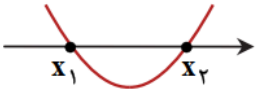
۲) f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x=a$:

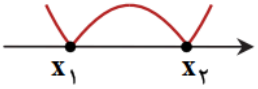
الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطهٔ گوشه‌ای).

ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطهٔ گوشه‌ای).

پ) هر دو نامتناهی باشند.

راه‌حل اول:

اگر نمودار تابع $y=x^۲+ax+b$ به‌صورت  باشد،

آنگاه نمودار $|x^۲+ax+b|$ به صورت  است و تابع در نقاط $x_۱$ و $x_۲$ مشتق‌ناپذیر است.

پس $x=۱$ و $x=a$ صفرهای متمایز تابع $y=x^۲+ax+b$ هستند، بنابراین:

$$\begin{cases} \text{مجموع ریشه‌ها} = S = -a \Rightarrow ۱+a=-a \Rightarrow a=-\frac{۱}{۲} \\ \text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها} = P = b \Rightarrow ۱\times a = b \Rightarrow b=-\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow ۴a-۲b=-۱$$

راه‌حل دوم:

نکته: تابع $y=|f(x)|$، در ریشه‌های سادهٔ $f(x)=۰$، مشتق‌ناپذیر و نقطهٔ گوشه‌ای است.

$x=۱$ و $x=a$ ریشه‌های سادهٔ عبارت داخل قدرمطلق هستند، بنابراین:

$$x^۲+ax+b=(x-۱)(x-a)=x^۲+x(-۱-a)+a \Rightarrow \begin{cases} -۱-a=a \Rightarrow a=-\frac{۱}{۲} \\ a=b \Rightarrow b=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

پس $۴a-۲b=-۱$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۰ نکته: فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n به‌صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت:

$$\lim_{x\to+\infty}(ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k)=\lim_{x\to+\infty}ax^n \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}ax^n$$

نکته: اگر n یک عدد صحیح باشد و $f(x)=x^n$، آنگاه: $f'(x)=nx^{n-1}$.

تابع f خطی است، پس وارون آن نیز یک تابع خطی است. در نتیجه $f^{-1}(x)=ax+b$. بنابراین:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|f^{-1}(x)+3}{3x^2+2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x(ax+b)+3}{3x^2+2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-ax^2-bx+3}{3x^2+2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-ax^2}{3x^2}=-\frac{a}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{a}{3}=\frac{5}{4}\Rightarrow a=-\frac{15}{4}\Rightarrow f^{-1}(x)=-\frac{15}{4}x+b$$

اکنون ضابطهٔ f را به‌دست می‌آوریم:

$$y=-\frac{15}{4}x+b\Rightarrow y-b=-\frac{15}{4}x\Rightarrow -\frac{4}{15}(y-b)=x$$

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} f(x)=-\frac{4}{15}x+\frac{4}{15}b\Rightarrow f'(x)=-\frac{4}{15}\Rightarrow f'(\sqrt{5})=-\frac{4}{15}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۱ نکته: اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه: $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$

ابتدا ضابطهٔ f و g را به‌دست می‌آوریم.

تابع سهمی $y=f(x)$ در $x=3$ بر محور طول‌ها مماس است و $f(0)=3$، پس: $f(x)=\frac{1}{3}(x-3)^2$

تابع خطی $y=g(x)$ از مبدأ و نقطهٔ $A(6,3)$ عبور می‌کند، پس: $g(x)=\frac{1}{2}x$

اکنون مشتق تابع داده‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{xg(x)}{f(x)}\Rightarrow y=\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2-2x+3}\Rightarrow y'=\frac{x(\frac{1}{3}x^2-2x+3)-(\frac{2}{3}x-2)(\frac{1}{2}x^2)}{(\frac{1}{3}x^2-2x+3)^2}$$

$$\xrightarrow{x=1} y'(1)=\frac{1(\frac{1}{3}-2+3)-(\frac{2}{3}-2)(\frac{1}{2})}{(\frac{1}{3}-2+3)^2}=\frac{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}{(\frac{4}{3})^2}=\frac{2}{\frac{16}{9}}=\frac{9}{8}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۲ نکته: مشتق تابع f در $x=a$ برابر است با:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مشتق چپ و راست تابع $f(x)=\frac{(ax+b)[\![2x]\!]}{x^2-1}$ در $x=2$ موجود است، پس f در $x=2$ از چپ و راست پیوسته است و در نتیجه f در $x=2$ پیوسته است. بنابراین:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\frac{(2a+b)(4)}{3}\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\frac{(2a+b)(3)}{3}\end{cases}\Rightarrow (2a+b)\times\frac{4}{3}=2a+b\Rightarrow 2a+b=0\Rightarrow b=-2a$$

بنابراین:

$$f(x)=\frac{(ax-2a)[\![2x]\!]}{x^2-1}\Rightarrow f(2)=0$$

اکنون مشتق راست و چپ تابع f را در $x=2$ به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\xrightarrow{f(2)=0} f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{(ax-2a)[\![2x]\!]}{(x^2-1)(x-2)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{a(x-2)\times 4}{(x^2-1)(x-2)}=\frac{4a}{3}$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\xrightarrow{f(2)=0} f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{(ax-2a)[\![2x]\!]}{(x^2-1)(x-2)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{a(x-2)\times 3}{(x^2-1)(x-2)}=a$$

اکنون طبق فرض سؤال داریم:

$$f'_+(2)-f'_-(2)=-6\Rightarrow\frac{4a}{3}-a=-6\Rightarrow a=-18$$

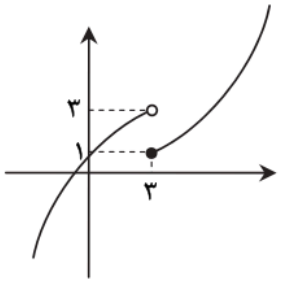
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۳ نکته (قضیه): اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f در a پیوسته است.

نکته: مشتق تابع f در $x=a$ برابر است با:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

توجه به نمودار، تابع f در $x=۳$ ناپیوسته است، ولی تابع $g(x)$ در $x=۳$ پیوسته است؛ زیرا:



$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۳^-} g(x)=\frac{۲\times ۰}{۳}=۰\\ \lim\limits_{x\to ۳^+} g(x)=\frac{۳\times ۰}{۱}=۰\\ g(۳)=\frac{۳\times ۰}{۱}=۰\end{cases}\Rightarrow g(x)\text{ در }x=۳\text{ پیوسته است.}$$

اکنون مشتق راست و چپ تابع $g(x)$ را با استفاده از تعریف مشتق در $x=۳$ به‌دست می‌آوریم:

$$g'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{g(x)-g(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{g(x)}{x-۳}$$

$$g'_+(۳)=\lim_{x\to ۳^+}\frac{\frac{[x](۳-x)}{f(x)}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{-[x]}{f(x)}=\frac{-۳}{۱}=-۳$$

$$g'_-(۳)=\lim_{x\to ۳^-}\frac{\frac{[x](۳-x)}{f(x)}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{-[x]}{f(x)}=\frac{-۲}{۳}=-\frac{۲}{۳}$$

پس اختلاف مشتقات چپ و راست در $x=۳$، برابر $\left|-\frac{۲}{۳}+۳\right|=\frac{۷}{۳}$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۴ نکته: به‌طور کلی اگر n یک عدد صحیح باشد و $f(x)=x^n$، آنگاه: $f'(x)=nx^{n-۱}$

چون f یک چندجمله‌ای است، پس f' هم یک چندجمله‌ای خواهد بود به‌طوری که درجهٔ f' از درجهٔ f یک واحد کمتر است. چون $f'+f$ از درجهٔ ۲ است، f یک چندجمله‌ای درجه ۲ است.

$$f(x)=ax^۲+bx+c\Rightarrow f'(x)=۲ax+b\quad (*)\Rightarrow f'(x)+f(x)=ax^۲+(۲a+b)x+b+c$$

با توجه به فرض سؤال، داریم:

$$ax^۲+(۲a+b)x+b+c=x^۲+۴x+۴\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\ ۲a+b=۴\Rightarrow ۲+b=۴\Rightarrow b=۲\\ b+c=۴\Rightarrow ۲+c=۴\Rightarrow c=۲\end{cases}$$

بنابراین:

$$(*)\Rightarrow f'(x)=۲x+۲\Rightarrow f'(۴)=۱۰$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۵ نکته: اگر f تابعی برحسب u و u تابعی از x باشد، آنگاه:

$$y=f(u) \Rightarrow y'=u'f'(u)$$

نکته: اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $x>0$، آنگاه $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

ابتدا تابع $f^2(x)$ را به‌دست می‌آوریم و سپس از طرفین آن مشتق می‌گیریم. (دقت کنید که $2x^2+4\sqrt{x}+1$ همواره مثبت است.)

$$f(x)=\sqrt{2x^2+4\sqrt{x}+1} \Rightarrow f^2(x)=2x^2+4\sqrt{x}+1 \xrightarrow{\text{مشتق}} 2f(x)f'(x)=4x+\frac{4}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x=1} 2f(1)f'(1)=4+2$$

$$\Rightarrow 2f(1)f'(1)=6 \Rightarrow f(1)f'(1)=3$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۶ نکته: به‌طور کلی اگر n یک عدد صحیح باشد و $f(x)=x^n$، آنگاه: $f'(x)=nx^{n-1}$

ابتدا ضابطهٔ تابع خطی f و سهمی g را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}(0,8)\in f\\(4,0)\in f\end{cases} \Rightarrow \text{شیب}=\frac{8-0}{0-4}=-2 \xrightarrow{(0,8)\in f} f(x)=-2x+8$$

$x=0$ و $x=4$ صفرهای سهمی g هستند، پس $x=2$ طول رأس سهمی است و نقطهٔ $(2,8)$ رأس سهمی است. در نتیجه:

$$g(x)=a(x-\alpha)(x-\beta) \Rightarrow g(x)=a(x)(x-4) \xrightarrow{g(2)=8} 8=a(2)(-2) \Rightarrow a=-2$$

$$\Rightarrow g(x)=-2(x)(x-4)=-2x^2+8x$$

اکنون با دو روش می‌توانیم $(fog')'(6)$ را به‌دست آوریم:

راه‌حل اول:

ضابطهٔ $(fog')'$ را به‌دست می‌آوریم:

$$g'(x)=-4x+8 \Rightarrow (fog')(x)=f(-4x+8)=-2(-4x+8)+8 \Rightarrow (fog')(x)=8x-8$$

حالا از fog' مشتق می‌گیریم:

$$(fog')'x=8 \Rightarrow (fog')'(6)=8$$

راه‌حل دوم:

$$(fog')'(6)=g''(6)f(g'(6)) \quad (1)$$

$$g(x)=-2x^2+8x=g'(x)=-4x+8 \Rightarrow g''(x)=-4 \Rightarrow \begin{cases}g'(6)=-16\\g''(6)=-4\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)} (fog')'(6)=-4\times f'(-16) \xrightarrow{f'(x)=-2} (fog')'(6)=-4\times -2=8$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۷ نکته: اگر $f(x)=\sqrt[۳]{x}$، آنگاه: $f'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$

نکته: اگر f تابعی برحسب u و u تابعی از x باشد، آنگاه:

$$y=f(u) \Rightarrow y'=u'f'(u)$$

نکته: اگر تابع f در $x=a$ مشتق راست (چپ) داشته باشد، آنگاه f در $x=a$ از راست (چپ) پیوسته است.

تابع f باید در $x=-۲$ پیوستگی چپ داشته باشد:

$$\lim_{x\to -۲^-} f(x)=(۴-۲)\sqrt[۳]{-۶+۱۴}=۴ \ , \ f(-۲)=۴$$

پس تابع f در $x=-۲$ از چپ پیوسته است.

در همسایگی چپ $x=-۲$ داریم:

$$\begin{cases} x\to -۲^- \Rightarrow -۲x\to ۴^+ \Rightarrow [-۲x]=۴ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow f(x)=(۴+x)\sqrt[۳]{۳x+۱۴} \\ x\to -۲ \Rightarrow |x|=-x \end{cases}$$

اکنون f' را به‌دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow f'(x)=\sqrt[۳]{۳x+۱۴}+\frac{۳}{۳\sqrt[۳]{(۳x+۱۴)^۲}}\times(۴+x) \Rightarrow f'_-(-۲)=\sqrt[۳]{۸}+\frac{۱}{\sqrt[۳]{۸^۲}}\times ۲=۲+\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۸ نکته: شیب خط مماس بر نمودار یک تابع در نقطه‌ای به طول a برابر مشتق آن تابع در a است.

نکته: $(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^۲}$

خط $y=b-x$ بر تابع f در $x=-۱$ مماس است، پس اولاً $f'(-۱)$ با شیب خط $y=b-x$ برابر است: یعنی $f'(-۱)=-۱$.

ثانیاً $f(-۱)$ با مقدار تابع $y=b-x$ در $x=-۱$ برابر است. بنابراین داریم:

$$f'(x)=\frac{-۱(۲ax+۱)-۲a(-x+a)}{(۲ax+۱)^۲} \Rightarrow f'(-۱)=\frac{-۱(-۲a+۱)-۲a(۱+a)}{(-۲a+۱)^۲}=\frac{-۲a^۲-۱}{(-۲a+۱)^۲} \xrightarrow{f'(-۱)=-۱} \frac{-۲a^۲-۱}{(-۲a+۱)^۲}=-۱$$

$$\Rightarrow ۲a^۲+۱=۴a^۲-۴a+۱ \Rightarrow ۲a^۲-۴a=۰ \Rightarrow ۲a(a-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۲ & ✓ \\ a=۰ & ✗ \end{cases}$$

اکنون داریم:

$$a=۲ \Rightarrow f(x)=\frac{-x+۲}{۴x+۱} \Rightarrow f(-۱)=-۱$$

$$y=b-x \xrightarrow[y=-۱]{x=-۱} -۱=b+۱ \Rightarrow b=-۲$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۹ نکته: شیب خط مماس بر نمودار یک تابع در نقطه‌ای به طول a برابر مشتق آن تابع در a است.

نکته: به‌طور کلی اگر n یک عدد صحیح باشد و $f(x)=x^n$، آنگاه:

$$f'(x)=nx^{n-1}$$

برای محاسبهٔ شیب خط مماس بر تابع f، مشتق آن را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=-x^3+bx^2-9x-b \Rightarrow f'(x)=-3x^2+2bx-9$$

f' یک تابع درجه دوم با شرط $a<0$ است. پس بیشترین مقدار آن در رأس سهمی با مختصات $S(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a})$ رخ می‌دهد، بنابراین:

$$-\frac{\Delta}{4a}=3 \Rightarrow \Delta=-12a \Rightarrow (2b)^2-4(-3)(-9)=-12(-3)$$

$$\Rightarrow 4b^2-108=36 \xrightarrow{\div 4} b^2-27=9$$

$$\Rightarrow b^2=36 \Rightarrow b=\pm 6 \xrightarrow{b>0} b=6$$

اکنون با حل معادلهٔ $f'(x)=0$ طول نقاطی که خط مماس بر منحنی افقی است، یعنی شیب خط مماس برابر صفر است را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=-3x^2+12x-9=0 \xrightarrow{\div(-3)} x^2-4x+3=0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-3)=0 \Rightarrow x=1 \ , \ x=3$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۰ نکته: اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب fog مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$$

چون $\sqrt[6]{3}>0$، بنابراین $|x|=x$ است و داریم:

$$f(x)=\frac{2}{x^3+x^3}=\frac{2}{2x^3}=\frac{1}{x^3} \ , \ g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x+x}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2x}}$$

اکنون با توجه به خواستهٔ سؤال، می‌توان نوشت:

$$f'(\sqrt[6]{3})g'(f(\sqrt[6]{3}))=(gof)'(\sqrt[6]{3})$$

پس تابع gof را تشکیل می‌دهیم و از آن مشتق می‌گیریم:

$$(gof)(x)=g(\frac{1}{x^3})=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{2}{x^3}}}=\frac{1}{\frac{\sqrt[3]{2}}{x}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}x \Rightarrow (gof)'(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

دقت کنید: اگر $x\leq 0$، آنگاه توابع f و g تعریف نمی‌شود؛ زیرا:

$$x\leq 0 \Rightarrow |x|=-x \Rightarrow x+|x|=x-x=0$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۱ نکته: اگر f تابعی برحسب u و u تابعی از x باشد، آنگاه: $y=f(u) \Rightarrow y'=u'f'(u)$

نکته: تابع f را متناوب می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به‌طوری که برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $x\pm T\in D_f$ و $f(x\pm T)=f(x)$، کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را دورهٔ تناوب f می‌نامیم.

دورهٔ تناوب تابع f برابر $T=3$ و f مشتق‌پذیر است، بنابراین: $f(x\pm T)=f(x)\ ,\ f'(x\pm T)=f'(x)$

اکنون مشتق تابع g را به‌دست می‌آوریم:

$$g(x)=f^{2}(x+2)+f(2x+4) \Rightarrow g'(x)=2f(x+2)f'(x+2)+2f'(2x+4) \xrightarrow{x=1} g'(1)=2f(3)f'(3)+2f'(24)$$

با توجه به اینکه: $T=3 \Rightarrow \begin{cases} f'(0)=f'(3)=f'(6)=\cdots=f'(24)=2 \\ f(0)=f(3)=3 \end{cases}$

بنابراین: $g'(1)=2\times3\times2+2\times2=12+4=52$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۲ نکته: آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a,a+h]$ به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم:

آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازهٔ $[a,a+h]=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

نکته: آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در نقطهٔ $x=a=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$

نکته: اگر $f(x)=\sqrt{ax+b}$ و $ax+b>0$، آنگاه: $f'(x)=\dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.

آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازهٔ $[1,2]=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=\dfrac{(4+1)-(2+2)}{1}=1$

$$f(x)=2x+\sqrt{7-3x} \Rightarrow f'(x)=2+\frac{-3}{2\sqrt{7-3x}}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در $x=\alpha=f'(\alpha)=2+\dfrac{-3}{2\sqrt{7-3\alpha}}$

اکنون داریم: $2+\dfrac{-3}{2\sqrt{7-3\alpha}}=1 \Rightarrow \dfrac{3}{2\sqrt{7-3\alpha}}=1 \Rightarrow 3=2\sqrt{7-3\alpha} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 9=4(7-3\alpha) \Rightarrow 9=28-12\alpha \Rightarrow \alpha=\dfrac{19}{12}$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۳ نکته: اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب fog مشتق‌پذیر است و داریم: $(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$

نکته: $(\dfrac{f}{g})'(a)=\dfrac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^{2}}$

ابتدا داریم: $(gof)'(2)=4 \Rightarrow f'(2)\cdot g'(f(2))=4 \quad (*)$

اکنون $f(2)$ و $f'(2)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+2}} \Rightarrow f(2)=\frac{2}{\sqrt{4}}=1$$

$$f'(x)=\frac{(1)(\sqrt{x+2})-(\frac{1}{2\sqrt{x+2}})(x)}{(\sqrt{x+2})^{2}} \Rightarrow f'(2)=\frac{2-\frac{1}{4}\times2}{4}=\frac{3}{8}$$

بنابراین:

$$(*) \Rightarrow \frac{3}{8}g'(1)=4 \Rightarrow g'(1)=\frac{32}{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۴ نکته: $y=f^n(x) \Rightarrow y'=nf^{n-1}(x)\cdot f'(x)$

نکته: اگر f تابعی برحسب u و u تابعی از x باشد:

$$y=f(u) \Rightarrow y'=u'f'(u)$$

نکته: مشتق تابع f در $x=a$ برابر است با:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

حد خواسته‌شده، همان $g'(-۴)$ است، پس از دو طرف رابطهٔ داده‌شده مشتق می‌گیریم:

$$g(۶-۵x)=f^۳(x^۳-۲x) \xrightarrow{\text{مشتق}} -۵g'(۶-۵x)=۳f^۲(x^۳-۲x)\cdot f'(x^۳-۲x)\cdot(۳x^۲-۲) \quad (*)$$

اکنون باید مقدار x را طوری انتخاب کنیم که $g'(-۴)$ به‌دست آید، پس:

$$۶-۵x=-۴ \Rightarrow x=۲$$

از طرفی:

$$۳f(۴)=۲f'(۴)=۶ \Rightarrow f(۴)=۲ \ , \ f'(۴)=۳$$

پس در رابطهٔ (*)، $x=۲$ را قرار می‌دهیم:

$$-۵g'(-۴)=۳f^۲(۴)f'(۴)(۱۰) \Rightarrow -۵g'(-۴)=۳\times۲^۲\times۳\times۱۰ \Rightarrow g'(۴)=-۷۲$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۵ نکته: آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a,a+h]$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازهٔ } [a,a+h]=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

نکته: آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در نقطهٔ } x=a=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

با تغییر ظاهر ضابطهٔ g، آهنگ متوسط را به‌دست می‌آوریم:

$$g(x)=x^۳-۳x^۲+۳x-۱+۱ \Rightarrow g(x)=(x-۱)^۳+۱$$

$$g(۱)=۱ \ , \ g(\sqrt[۳]{۳}+۱)=(\sqrt[۳]{۳}+۱-۱)^۳+۱=۴$$

$$\text{آهنگ تغییر متوسط تابع g در بازهٔ } [۱,\sqrt[۳]{۳}+۱]=\frac{g(\sqrt[۳]{۳}+۱)-g(۱)}{\sqrt[۳]{۳}+۱-۱}=\frac{۴-۱}{\sqrt[۳]{۳}}=\frac{۳}{\sqrt[۳]{۳}}$$

از تابع f مشتق می‌گیریم و $f'(-۲)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt[۳]{\frac{x-۱}{x+۱}} \Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{۲}{(x+۱)^۲}}{۳\sqrt[۳]{(\frac{x-۱}{x+۱})^۲}} \Rightarrow f'(-۲)=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{۳^۲}} \Rightarrow f'(-۲)=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{۹}}$$

بنابراین، خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$\frac{\frac{۳}{\sqrt[۳]{۳}}}{\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{۹}}}=\frac{۹\sqrt[۳]{۳}}{۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۶ نکته: شیب خط مماس بر نمودار یک تابع در نقطه‌ای به طول a برابر مشتق آن تابع در a است.

در تابع گزینهٔ ۲، شیب خط مماس در هر نقطه مقداری منفی است، اما مقدار تابع در هر نقطه مثبت است (زیرا تابع کاملاً بالای محور طول‌ها قرار دارد). پس در هیچ نقطه‌ای شیب خط مماس (یعنی مشتق تابع) با مقدار تابع برابر نیست.

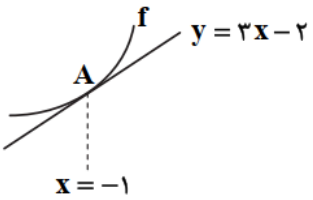
در سایر گزینه‌ها، قطعاً نقطه‌ای یافت می‌شود که مشتق در آن نقطه با مقدار تابع در آن نقطه برابر است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۷ نکته: مشتق تابع f در $x=a$ به‌صورت روبه‌رو تعریف می‌شود: $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

نکته: مشتق تابع f در $x=a$ برابر با شیب خط مماس در $x=a$ است.

شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید:



$$y=۳x-۲ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \Rightarrow y=-۵ \Rightarrow A(-۱,-۵) \Rightarrow f(-۱)=-۵ \\ \text{شیب خط مماس}=۳ \Rightarrow f'(-۱)=۳ \end{cases}$$

حد خواسته‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-۱}\frac{f(x)+۵}{x^۳+۱}=\lim_{x\to-۱}\frac{f(x)-(-۵)}{(x+۱)(x^۲-x+۱)}=\lim_{x\to-۱}\frac{۱}{x^۲-x+۱}\times\lim_{x\to-۱}\frac{f(x)-f(-۱)}{x-(-۱)}=\frac{۱}{۳}f'(-۱)=\frac{۱}{۳}\times۳=۱$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۸ نکته: شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $A(a,f(a))$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{شیب خط مماس بر نمودار تابع } f \text{ در } A=\lim_{h\to۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

با توجه به نمودار، خط d که در نقطهٔ $x=۲$ بر تابع f مماس شده شیبی برابر با $\frac{۳}{۲}$ دارد، پس $f'(۲)=\frac{۳}{۲}$، از طرفی $f(۲)=۳$ و داریم:

$$\lim_{h\to۰}\frac{f^۲(۲+h)-f^۲(۲)}{h}=\lim_{h\to۰}\left(\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}\times\frac{f(۲+h)+f(۲)}{۱}\right)=f'(۲)\cdot(۲f(۲))=\frac{۳}{۲}(۲(۳))=۹$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۹ نکتهٔ ۱: شیب خط گذرنده از دو نقطه به طول‌های a و b روی تابع f برابر است با: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

نکتهٔ ۲: شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $x=a$، در صورت وجود برابر با $f'(a)$ است.

نکتهٔ ۳: دو خط غیرموازی با محور yها وقتی با هم موازی‌اند که شیب‌های برابری داشته باشند.

شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $x=۲$ و $x=۱۰$ روی منحنی تابع f برابر است با:

$$\frac{f(۱۰)-f(۲)}{۱۰-۲}=\frac{۶-۱۴}{۸}=-۱$$

از طرفی شیب خط مماس بر نمودار تابع f در $x_۰$ برابر با $f'(x_۰)$ است، پس:

$$f'(x_۰)=-۱ \Rightarrow \frac{-۹}{(x_۰-۱)^۲}=-۱ \Rightarrow (x_۰-۱)^۲=۹ \xrightarrow{x_۰\in[۲,۱۰]} x_۰=۴$$

حال معادلهٔ خط مماس بر تابع f در نقطه‌ای به طول $x=۴$ را می‌نویسیم و داریم:

$$y-f(۴)=f'(۴)(x-۴) \Rightarrow y-۸=-۱(x-۴) \xrightarrow{x=۰} y=۱۲$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۰ نکتهٔ ۱: تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، هرگاه در تمامی نقاط مشتق‌پذیر باشد.

نکتهٔ ۲: اگر تابع f در نقطه‌ای مشتق‌پذیر باشد، در آن نقطه حتماً پیوسته نیز هست.

چون تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، پس در تمامی اعداد حقیقی از جمله $x=۴$ مشتق‌پذیر است. بنابراین در نقطه‌ای به طول ۴ پیوسته است و داریم:

$$\lim_{x\to ۴^+} f(x)=\lim_{x\to ۴^-} f(x)=f(۴) \Rightarrow \frac{a}{۴}=\sqrt{۵-۴}+b \Rightarrow \frac{a}{۴}=۱+b$$

همچنین تابع مشتق f برابر است با:

$$f'(x)=\begin{cases} -\frac{a}{x^۲} & x\geq ۴ \\ \frac{-۱}{۲\sqrt{۵-x}} & x<۴ \end{cases}$$

چون تابع f در $x=۴$ مشتق‌پذیر است، پس مشتق چپ و راست آن در $x=۴$ برابرند. بنابراین:

$$f'_+(۴)=f'_-(۴) \Rightarrow \frac{-a}{۱۶}=\frac{-۱}{۲\sqrt{۵-۴}} \Rightarrow \frac{a}{۱۶}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow a=۸$$

پس مقدار خواسته‌شدهٔ سؤال برابر است با:

$$b=\frac{a}{۴}-۱=\frac{۸}{۴}-۱=۱ \Rightarrow a+b=۸+۱=۹$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۱ نکتهٔ ۱: آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[a,b]$ برابر است با:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

نکتهٔ ۲: آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطهٔ $x=a$ برابر است با:

$$f'(a)$$

آهنگ تغییر متوسط تابع f روی بازهٔ $[-۵,۰]$ برابر است با:

$$\frac{f(۰)-f(-۵)}{۰-(-۵)}=\frac{a-\frac{a}{۶}}{۵}=\frac{a}{۶}$$

همچنین آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطه‌ای به طول $x=-۲$ برابر است با:

$$f'(x)=\frac{-a\times(-۱)}{(۱-x)^۲}=\frac{a}{(۱-x)^۲} \Rightarrow f'(-۲)=\frac{a}{(۱+۲)^۲} \quad f'(-۲)=\frac{a}{۹}$$

آهنگ تغییر متوسط به‌دست آمده از آهنگ تغییر لحظه‌ای دو واحد بیشتر است، پس:

$$\frac{a}{۶}-\frac{a}{۹}=۲ \Rightarrow \frac{۹a-۶a}{۵۴}=۲ \Rightarrow \frac{a}{۱۸}=۲ \Rightarrow a=۳۶$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۲ نکته: مشتق دوم تابع f برابر مشتقِ تابع مشتق f است یعنی:

$$f''(x) = (f'(x))'$$

برای محاسبهٔ ساده‌تر مشتق تابع f، از تعریف توان گویا یعنی $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ و $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ استفاده می‌کنیم:

$$f(x) = x\sqrt[3]{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} \Rightarrow f(x) = x \times x^{\frac{1}{3}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{3}+1} - x^{\frac{1}{2}-1} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{4}{3}} - x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{4}{3}x^{(\frac{4}{3}-1)} - (-\frac{1}{2})x^{-\frac{1}{2}-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(x) = \frac{4}{3} \times \frac{1}{3}x^{(\frac{1}{3}-1)} + \frac{1}{2}(-\frac{3}{2})x^{(-\frac{3}{2}-1)}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f''(1) = \frac{4}{9} - \frac{3}{4} = \frac{16-27}{36} = -\frac{11}{36}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۳ نکته: اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب fog مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(fog)'(x) = g'(x)f'(g(x))$$

ابتدا از طرفین تساوی مشتق می‌گیریم:

$$(1 + \frac{3}{2\sqrt{3x+3}})f'(x + \sqrt{3x+3}) = \frac{2}{2\sqrt{2x}} \quad (*)$$

حال داریم:

$$x + \sqrt{3x+3} = 5 \Rightarrow \sqrt{3x+3} = 5 - x \xrightarrow{\text{توان ۲}} 3x + 3 = 25 - 10x + x^2 \Rightarrow x^2 - 13x + 22 = 0$$

$$\Rightarrow (x-11)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 11 \times & \text{(در معادله صدق نمی‌کند.)} \\ x = 2 \checkmark \end{cases}$$

پس برای محاسبهٔ $f'(5)$ کافی است در رابطهٔ (*) مقدار $x = 2$ را قرار دهیم:

$$(1 + \frac{3}{2(3)})f'(2+3) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}f'(5) = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(5) = \frac{1}{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۴

نکته: $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

راه‌حل اول:

در همسایگی راست $x=-۲$، می‌دانیم $[x]=-۲$، همچنین با توجه به اینکه $x<۰$ و $x+۲>۰$، پس:

$|x^۲+۲x|=|x(x+۲)|=-x(x+۲)$؛ بنابراین با توجه به تعریف مشتق راست داریم:

$$f'_+(-۲)=\lim_{x\to-۲^+}\frac{f(x)-f(-۲)}{x-(-۲)}=\lim_{x\to-۲^+}\frac{-x(x+۲)+x(-۲)-(۰-۲\times(-۲))}{x+۲}=\lim_{x\to-۲^+}\frac{-x^۲-۴x-۴}{x+۲}$$

$$=\lim_{x\to-۲^+}\frac{-(x+۲)^۲}{x+۲}=\lim_{x\to-۲^+}-(x+۲)=۰$$

راه‌حل دوم:

چون تابع در $x=-۲$ پیوستگی راست داشته و در همسایگی راست $x=-۲$، به‌صورت $f(x)=-x^۲-۲x+x(-۲)=-x^۲-۴x$ است، پس:

$$f'(x)=-۲x-۴ \Rightarrow f'_+(-۲)=-۲(-۲)-۴=۴-۴=۰$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۵

نکته: $a^۳-b^۳=(a-b)(a^۲+ab+b^۲)$

نکته: مشتق تابع f در $x=a$ برابر است با: $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

نکته: شیب خط مماس بر نمودار یک تابع در نقطه‌ای به طول a، برابر مشتق آن تابع در a است.

ابتدا شیب و سپس معادلهٔ خط d را با داشتن دو نقطهٔ $(۰,۲)$ و $(۴,۴)$ به‌دست می‌آوریم:

$$\text{شیب خط } d: m=\frac{۲-۴}{۰-۴}=\frac{۱}{۲} \xrightarrow{(۰,۲)\in d} y=\frac{۱}{۲}x+۲$$

خط d بر تابع f در $x=۱$ مماس است، پس شیب خط d برابر $f'(۱)$ است، یعنی $f'(۱)=\dfrac{۱}{۲}$.

از طرفی برای محاسبهٔ $f(۱)$، کافی است در ضابطهٔ خط d مقدار $x=۱$ را قرار دهیم: $d: y=\dfrac{۱}{۲}x+۲ \xrightarrow{x=۱} y=\dfrac{۵}{۲} \Rightarrow f(۱)=\dfrac{۵}{۲}$

اکنون حاصل حد خواسته‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to۱}\frac{f^۳(x)-f^۳(۱)}{۲x^۲-۳x+۱}=\lim_{x\to۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}\times\lim_{x\to۱}\frac{f^۲(x)+f(x)f(۱)+f^۲(۱)}{۲x-۱}=f'(۱)\times۳f^۲(۱)=\frac{۱}{۲}\times۳\times\frac{۲۵}{۴}=\frac{۷۵}{۸}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۶

نکته: حد زیر را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطهٔ a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند:

$$f'(a)=\lim_{h\to۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

نکته: $(\dfrac{f}{g})'(a)=\dfrac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^۲}$

با توجه به اینکه $f(۴)=۱$، پس حد $\lim\limits_{h\to۰}\dfrac{f(۴+h)-۱}{h}$ همان تعریف مشتق تابع f در $x=۴$ است، بنابراین داریم:

$$f'(x)=\frac{\frac{۲}{۲\sqrt{۲x+۱}}(۱۵-۳x)-(-۳)\sqrt{۲x+۱}}{(۱۵-۳x)^۲} \Rightarrow f'(۴)=\frac{\frac{۱}{\sqrt{۹}}(۱۵-۱۲)+۳\sqrt{۹}}{(۱۵-۱۲)^۲}=\frac{۱+۹}{۹}=\frac{۱۰}{۹}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۷ نکته: شیب خط مماس بر نمودار یک تابع در نقطه‌ای به‌طول a، برابر مشتق آن تابع در a است.

نکته: اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب fog مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(fog)'(x) = g'(x)f'(g(x))$$

نکته: اگر $f(x) = \sqrt{ax+b}$ و $ax+b > ۰$، آنگاه:

$$f'(x) = \frac{a}{۲\sqrt{ax+b}}$$

ابتدا محل برخورد تابع f با محور عرض‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$x = ۰ \Rightarrow f(۰) = ۰ + ۳\sqrt{۱} = ۳ \Rightarrow A(۰,۳)$$

پس باید مشتق تابع g را در نقطه‌ای به‌طول $x = ۰$ به‌دست آوریم:

$$g(x) = f(f(x)) \Rightarrow g'(x) = f'(x)\cdot f'(f(x)) \xrightarrow{x=۰} g'(۰) = f'(۰)\cdot f'(f(۰)) \xrightarrow{f(۰)=۳} g'(۰) = f'(۰)\cdot f'(۳)$$

اکنون مشتق تابع f را در $x = ۰$ و $x = ۳$ محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = x + ۳\sqrt{x+۱} \Rightarrow f'(x) = ۱ + \frac{۳}{۲\sqrt{x+۱}} \Rightarrow \begin{cases} f'(۰) = ۱ + \frac{۳}{۲} = \frac{۵}{۲} \\ f'(۳) = ۱ + \frac{۳}{۴} = \frac{۷}{۴} \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$g'(۰) = f'(۰)f'(۳) = \frac{۵}{۲} \times \frac{۷}{۴} = \frac{۳۵}{۸}$$

پس شیب خط مماس بر تابع g در نقطه‌ای به‌طول $x = ۰$، برابر با $\frac{۳۵}{۸}$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۸ نکته: آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a,a+h]$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ در بازهٔ } [a,a+h] = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

نکته: آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f را در نقطهٔ $x=a$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f \text{ در نقطهٔ } x=a = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

نکته: $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

ابتدا آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\frac{\sqrt{4x+1}}{(x-1)^2}$ را در بازهٔ $[0,\frac{3}{4}]$ به‌دست می‌آوریم:

$$f(0)=1 \text{ و } f(\frac{3}{4}) = \frac{2}{\frac{1}{16}} = 32$$

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع} = \frac{f(\frac{3}{4})-f(0)}{\frac{3}{4}-0} = \frac{32-1}{\frac{3}{4}} = \frac{31}{\frac{3}{4}} = \frac{124}{3}$$

اکنون آهنگ لحظه‌ای تغییر را در $x=2$ به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \frac{(\frac{4}{2\sqrt{4x+1}})(x-1)^2 - 2(x-1)(\sqrt{4x+1})}{(x-1)^4} \Rightarrow f'(2) = \frac{\frac{2}{3}-6}{1} = -\frac{16}{3}$$

بنابراین اختلاف آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازهٔ $[0,\frac{3}{4}]$، با آهنگ لحظه‌ای تغییر آن در $x=2$ برابر است با:

$$\frac{124}{3} - (-\frac{16}{3}) = \frac{140}{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۹ نکته: مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x=a$ را با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\quad,\quad f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

نکته: $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$

راه‌حل اول:

ابتدا مشتق راست تابع f را در $x=1$ به‌دست می‌آوریم:

$$f(1)=0\ ,\ f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}\left|x^2-1\right|-0}{x-1}$$

با توجه به اینکه وقتی $x\to 1^+$ ، $x^2-1>0$ است، پس:

$$\left|x^2-1\right|=x^2-1.$$

بنابراین داریم:

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x}(x+1)=2$$

پس شیب نیم‌مماس راست در $x=1$ برابر ۲ است. اکنون معادلهٔ این نیم‌مماس را می‌نویسیم:

$$A(1,0),m=2\ \Rightarrow\ y=2x-2$$

حال محل برخورد این خط را با نیمساز ناحیهٔ اول به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}y=2x-2\\ \\ y=x\end{cases}\Rightarrow 2x-2=x\ \Rightarrow\ x=2\xrightarrow{\text{عرض نقطهٔ برخورد}}y=2$$

راه‌حل دوم:

تابع f در $x=1$ پیوسته و در همسایگی راست $x=1$ ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=\sqrt{x}(x^2-1)$ است. بنابراین شیب نیم‌مماس راست برابر است با:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-1)+2x(\sqrt{x})\ \Rightarrow\ f'(1)=2\ \Rightarrow\ m=2$$

و ادامه مانند روش اول است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۰ نکته: اگر $f(x)=\sqrt[۳]{x}$، آنگاه:

$$f'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$$

نکته: اگر f تابعی برحسب u و u تابعی از x باشد:

$$y=f(u) \Rightarrow y'=u'f'(u)$$

نکته: اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و در این نقطه مشتق چپ و راست نامتناهی داشته باشد، در این صورت خط $x=a$ را «مماس قائم» بر منحنی f در نقطهٔ $(a,f(a))$ می‌نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

ابتدا مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=a-\sqrt[۳]{ax+۲} \Rightarrow f'(x)=-\frac{a}{۳\sqrt[۳]{(ax+۲)^۲}}$$

تابع f در $x=-۲$ مماس قائم دارد، پس باید $\lim\limits_{x\to -۲} f'(x)$، نامتناهی باشد، پس $x=-۲$ ریشهٔ مخرج تابع f' است. بنابراین:

$$ax+۲=۰ \xrightarrow{x=-۲} -۲a+۲=۰ \Rightarrow a=۱$$

پس $f'(x)=-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۲)^۲}}$.

برای محاسبهٔ شیب خط مماس در $x=-۳$، کافی است $f'(-۳)$ را به‌دست آوریم. بنابراین:

$$f'(-۳)=-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(-۱)^۲}}=-\frac{۱}{۳}$$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۱ نکته: به‌طور کلی آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a,a+h]$ به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ در بازهٔ } [a,a+h]=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

نکته: آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f \text{ در نقطهٔ } x=a=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

ابتدا آهنگ متوسط تغییر تابع f را در بازهٔ $[۲,۴]$ به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x+۲}{x-۱} \Rightarrow \begin{cases} f(۲)=۴ \\ f(۴)=۲ \end{cases} \Rightarrow \text{آهنگ متوسط}=\frac{۲-۴}{۴-۲}=-۱$$

اکنون مشتق تابع g را به‌دست می‌آوریم:

$$g(x)=f(a)\sqrt{\frac{x^۲+۵}{x+۳}} \Rightarrow g'(x)=f(a)\times\frac{\frac{۲x(x+۳)-(x^۲+۵)}{(x+۳)^۲}}{۲\sqrt{\frac{x^۲+۵}{x+۳}}} \Rightarrow g'(-۲)=f(a)\times\frac{-۴-۹}{۲\sqrt{۹}} \Rightarrow g'(-۲)=-\frac{۱۳}{۶}f(a)$$

با توجه به فرض سؤال:

$$-\frac{۱۳}{۶}f(a)=-۱۳ \Rightarrow f(a)=۶ \Rightarrow \frac{a+۲}{a-۱}=۶ \Rightarrow a+۲=۶a-۶ \Rightarrow a=\frac{۸}{۵}=۱/۶$$

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۲ نکته : $f''(x)=(f'(x))'$

ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x^۴+\frac{۱}{x^۴}+۲}=\sqrt{(x^۲+\frac{۱}{x^۲})^۲}=\left|x^۲+\frac{۱}{x^۲}\right|=x^۲+\frac{۱}{x^۲}$$

اکنون داریم:

$$f(x)=x^۲+\frac{۱}{x^۲}\Rightarrow f'(x)=۲x+\frac{-۲x}{x^۴}\Rightarrow f'(x)=۲x-\frac{۲}{x^۳}$$

$$f''(x)=۲-\frac{۰-۳x^۲\times ۲}{x^۶}\Rightarrow f''(x)=۲+\frac{۶}{x^۴}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۳ نکته: اگر f تابعی برحسب u و u تابعی از x باشد، داریم: $y=f(u)\Rightarrow y'=u'\cdot f'(u)$

نکته: اگر u تابعی از x باشد، داریم:

$$y=\sqrt{u}\Rightarrow y'=\frac{u'}{۲\sqrt{u}}$$

$$f(x)=۵+\sqrt{x+۶}\Rightarrow f(۳)=۵+\sqrt{۹}=۸$$

$$f'(x)=۰+\frac{۱}{۲\sqrt{x+۶}}\Rightarrow f'(۳)=\frac{۱}{۲\sqrt{۹}}=\frac{۱}{۶}$$

$$y=f(x\cdot f(x))\Rightarrow y'=(x\cdot f(x))'\cdot f'(xf(x))=(f(x)+xf'(x))\cdot f'(xf(x))$$

$$x=۳\Rightarrow y'=(f(۳)+۳f'(۳))f'(۳f(۳))=(۸+\frac{۳}{۶})f'(۳\times ۸)\Rightarrow y'=\frac{۱۷}{۲}f'(۲۴)=\frac{۱۷}{۲}\times\frac{۱}{۲\sqrt{۳۰}}=\frac{۱۷}{۴\sqrt{۳۰}}=\frac{۱۷\sqrt{۳۰}}{۱۲۰}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۴ نکته: آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[a,b]$ برابر است با:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

نکته: آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در $x=a$ برابر است با:

$$f'(a)$$

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[-۱,۱]$ برابر است با:

$$\frac{f(۱)-f(-۱)}{۱-(-۱)}=\frac{\sqrt[۳]{۱+۱۳+۱۳}-\sqrt[۳]{۱-۱۳+۱۳}}{۲}=\frac{\sqrt[۳]{۲۷}-۱}{۲}=\frac{۳-۱}{۲}=۱$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در $x=-۱$ برابر است با $f'(-۱)$، پس داریم:

$$f'(x)=\frac{۲x+۱۳}{۳\sqrt[۳]{(x^۲+۱۳x+۱۳)^۲}}\Rightarrow f'(-۱)=\frac{-۲+۱۳}{۳\sqrt[۳]{(۱-۱۳+۱۳)^۲}}=\frac{۱۱}{۳}$$

اختلاف دو مقدار به‌دست‌آمده برابر است با:

$$\frac{۱۱}{۳}-۱=\frac{۸}{۳}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۵ نکته: شیب خط مماس بر نمودار یک تابع در نقطه‌ای به‌طول a برابر مشتق آن تابع در a است.

نکته: مشتق تابع f در $x=a$ برابر است با:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

نکته: اگر f تابعی برحسب u و u تابعی از x باشد:

$$y=f(u)\Rightarrow y'=u'f'(u)$$

نکته: اگر $f(x)=\sqrt[3]{x}$، آنگاه: $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

$$\text{نکته}: (\frac{f}{g})(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$$

خط $y=3-2x$ بر تابع مشتق‌پذیر f در $x=2$ مماس است؛ بنابراین:

$$\begin{cases}y=3-2x\xrightarrow{x=2}y=-1\\ y'=-2\end{cases}\Rightarrow f(2)=-1, f'(2)=-2$$

از طرفی داریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)$$

پس کافی است $g'(2)$ را به‌دست آوریم:

$$g(x)=\frac{f(x)}{\sqrt[3]{x^2+4}}\Rightarrow g'(x)=\frac{f'(x)\sqrt[3]{x^2+4}-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+4)^2}}f(x)}{(\sqrt[3]{x^2+4})^2}\Rightarrow g'(2)=\frac{f'(2)\times 2-\frac{4}{3\times 4}\times f(2)}{4}=\frac{-4+\frac{1}{3}}{4}=-\frac{11}{12}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۶ نکته: شیب نیم‌مماس راست (چپ) در $x=a$ برابر با مشتق راست (چپ) در این نقطه است.

$$\text{نکته}: f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ ,\ f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ابتدا مشتق چپ و راست در $x=3$ را می‌یابیم.

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{a|x^2-9|-0}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{a|x^2-9|}{x-3}$$

$$f'_-(3)=\lim_{x\to 3^-}\frac{-a(x^2-9)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{-a(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}(-a(x+3))=-6a$$

$$f'_+(3)=\lim_{x\to 3^+}\frac{a(x^2-9)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{a(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}a(x+3)=6a$$

چون نیم‌مماس‌های چپ و راست بر هم عمودند، حاصل‌ضرب شیب آن‌ها برابر -1 است.

$$6a(-6a)=-1$$

$$\Rightarrow 36a^2=1$$

$$\Rightarrow a^2=\frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow a=\pm\frac{1}{6}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۷ نکته: شیب خط مماس بر نمودار یک تابع در نقطه‌ای به‌طول a، برابر مشتق آن تابع در a است.

نکته : $(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^{۲}}$

توابع f و g در نقطه‌ای به‌طول $x=۲$ بر هم مماس‌اند و هر دو تابع در $x=۲$ مشتق‌پذیر هستند. پس توابع f و g در $x=۲$ مماس‌مشترک دارند؛ بنابراین:

$$f(۲)=g(۲)\ ,\ f'(۲)=g'(۲)$$

اکنون:

$$f(x)=x^{۲}-\frac{۱۶}{x}+a \Rightarrow f'(x)=۲x+\frac{۱۶}{x^{۲}}$$

$$g(x)=\frac{۲x+b}{x^{۲}-۳} \Rightarrow g'(x)=\frac{۲(x^{۲}-۳)-۲x(۲x+b)}{(x^{۲}-۳)^{۲}}=\frac{-۲x^{۲}-۲bx-۶}{(x^{۲}-۳)^{۲}}$$

بنابراین:

$$\left.\begin{matrix}f(۲)=a-۴\\ g(۲)=۴+b\end{matrix}\right\} \Rightarrow a-۴=۴+b \Rightarrow a-b=۸\ \ (۱)$$

$$\left.\begin{matrix}f'(۲)=۴+۴=۸\\ g'(۲)=-۴b-۱۴\end{matrix}\right\} \Rightarrow ۸=-۴b-۱۴ \Rightarrow ۴b=-۲۲ \Rightarrow b=-۵/۵$$

$$\xrightarrow{(۱)} a=۲/۵ \Rightarrow a+b=-۳ \Rightarrow [a+b]=-۳$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۸ نکته: اگر f تابعی برحسب u و u تابعی از x باشد:

$$y=f(u) \Rightarrow y'=u'f'(u)$$

نکته: به‌طور کلی آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a,a+h]$ به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازهٔ } [a,a+h] = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

نکته: آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x=a \text{ آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در نقطهٔ } = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

نکته: مشتق تابع f در $x=a$ برابر است با:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

حد عبارت x^2-4 در $x=2$ برابر صفر است، پس داریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-5}{x^2-4}=6 \Rightarrow \lim_{x\to 2}(f(x)-5)=0 \xrightarrow{\text{f پیوسته است.}} f(2)=5$$

از طرفی:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-5}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=6 \Rightarrow f'(2)\times\frac{1}{4}=6 \Rightarrow f'(2)=24 \quad (*)$$

اکنون آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $g(x)$ را در $x=1$ به‌دست می‌آوریم:

$$g(x)=f(x^2+1) \Rightarrow g'(x)=2xf'(x^2+1) \Rightarrow g'(1)=2f'(2) \xrightarrow{(*)} g'(1)=48$$

با توجه به فرض سؤال، تابع f محور عرض‌ها را در $y=3$ قطع می‌کند؛ بنابراین:

$$\begin{cases}f(2)=5\\ f(0)=3\end{cases} \Rightarrow \text{آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازهٔ } [0,2] = \frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{5-3}{2}=1$$

در نتیجه نسبت خواسته‌شده برابر ۴۸ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۹ نکته: اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f در $x=a$ پیوسته است.

نکته: تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر است هرگاه: $f'_+(a)=f'_-(a)$

چون f در $x=-1$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته و مشتق‌های چپ و راست آن در این نقطه با هم برابر است.

$$\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=f(-1) \Rightarrow 0=-1+a-b+1 \Rightarrow a=b$$

از طرفی قبل از اینکه مشتق‌های یکطرفهٔ f را در $x=-1$ به‌دست آوریم توجه داشته باشید که وقتی $x\to(-1)^-$ آنگاه $x^2+x>0$، پس داریم:

$$\begin{cases}x\to(-1)^-: f(x)=x^2+x \xrightarrow{f'(x)=2x+1} f'_-(-1)=-2+1=-1\\ x\to(-1)^+: f(x)=x^3+ax^2+bx+1 \xrightarrow{f'(x)=3x^2+2ax+b} f'_+(-1)=3-2a+b\end{cases}$$

$$\Rightarrow f'_+(-1)=f'_-(-1) \Rightarrow 3-2a+b=-1 \xrightarrow{a=b} 3-a=-1 \Rightarrow a=4 \Rightarrow a+b=8$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۰ نکته: اگر خط $y=mx+b$ بر تابع f در $x=a$ مماس باشد، آنگاه:

$$\begin{cases} f(a)=ma+b \\ f'(a)=m \end{cases}$$

نکته: $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

خط $y=\frac{۳}{۲}x-\frac{۱}{۲}$ بر تابع f در $x=۲$ مماس است، پس:

$$\begin{cases} f(۲)=\frac{۳}{۲}(۲)-\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲} \\ f'(۲)=\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

پس داریم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲f^{۲}(x)-f(x)-۱۰}{x^{۲}-۴}=\lim_{x\to ۲}\frac{(۲f(x)+۴)(f(x)-\frac{۵}{۲})}{(x-۲)(x+۲)}=\lim_{x\to ۲}(\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}\times\frac{۲f(x)+۴}{x+۲})=f'(۲)\times\frac{۲f(۲)+۴}{۴}=\frac{۳}{۲}(\frac{۹}{۴})=\frac{۲۷}{۸}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۱ سرنخ حاصل ضرب دو عبارت زمانی مثبت است که هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند.

تک پله: برای آن که نامعادلهٔ $x^{۳}f'(x)\geq ۰$ در بازهٔ (a,b) برقرار باشد باید جملات $x^{۳}$ و $f'(x)$ هم علامت باشند. در موارد (الف) و (پ) در بازهٔ (a,b) نامعادلهٔ $x^{۳}f'(x)\geq ۰$ برقرار است، چون در آن‌ها $x^{۳}<۰$ و $f'(x)<۰$ است. همچنین در مورد (ب) چون $f(x)$ غیر یکنوا است پس نامعادله مذکور برقرار نخواهد بود.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۲ از آنجایی که بزرگ ترین توان عبارت $f(x)+f'(۲x)=x^{۳}+۱۲x^{۲}+۴x+۹$ از مرتبه ۳ می باشد نتیجه می‌گیریم $f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d$ خواهد بود پس داریم:

$$f'(x)=۳ax^{۲}+۲bx+c\xrightarrow{x\to ۲x}f'(۲x)=۱۲ax^{۲}+۴bx+c$$

$$f(x)+f'(۲x)=x^{۳}+۱۲x^{۲}+۴x+۹=ax^{۳}+(۱۲a+b)x^{۲}+(۴b+c)x+c+d$$

حال از تساوی به دست آمده نتیجه می‌گیریم:

$ax^{۳}=x^{۳}\to a=۱$ $\quad$ $(۱۲a+b)x^{۲}=۱۲x^{۲}\to ۱۲+b=۱۲\to b=۰$

$(۴b+c)x=۴x\to ۴(۰)+c=۴\to c=۴$ $\quad$ $c+d=۹\to ۴+d=۹\to d=۵$

بنابراین $f(x)=x^{۳}+۴x+۵$ می‌باشد پس: $f(-۱)=(-۱)^{۳}+۴(-۱)+۵=۰$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۳ **سرنخ** کافیه تشخیص دهید عبارت خواسته شده، مشتق کدام عبارت است.

حاصل عبارت $f'(۲)g'(۲)-g''(۲)f(۲)$ را باید به دســـت بیاورید که با کمی دقت می‌توان متوجه شـــد که این عبارت، در واقع باز شدهٔ عبارت $\left(\frac{f(x)}{g'(x)}\right)'\times\left(g'(x)\right)^{۲}$ است.

$$g'(x)=\frac{۳}{(۲x+۱)^{۲}}$$

تابع $f(x)$ را نیز می‌توانیم به صورت زیر، ساده کنیم:

$$f(x)=\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(۴x^{۲}+۴x+۱)}=\frac{۱}{(۲x+۱)^{۲}}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{f(x)}{g'(x)}=\frac{\frac{۱}{(۲x+۱)^{۲}}}{\frac{۳}{(۲x+۱)^{۲}}}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\left(\frac{f(x)}{g'(x)}\right)'=۰$$

در نتیجه:

$$۰\times\left(g'(x)\right)^{۲}=\text{صفر}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۴ **سرنخ** مشتق تابع داده شده، سهمی درجه دوم است. بیشترین مقدار این سهمی برابر بیشترین شیب ممکن است.

$$f(x)=-\frac{۲}{۳}x^{۳}+۲x^{۲}+x-۱\Rightarrow f'(x)=-۲x^{۲}+۴x+۱$$

بیشترین شیب مماس، ماکزیمم مقدار مشتق است که در رأس سهمی $-۲x^{۲}+۴x+۱$ اتفاق می افتد.

$$x_{max}=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۴}{۲(-۲)}=۱, f(۱)=\frac{۴}{۳}\Rightarrow A\left(۱,\frac{۴}{۳}\right)$$

شیب خط مماس : $m=f'(۱)=-۲+۴+۱=۳$

معادلهٔ خط مماس : $y-\frac{۴}{۳}=۳(x-۱)\xrightarrow{x=۰}y=\frac{۴}{۳}-۳=\frac{-۵}{۳}$ عرض از مبدأ

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۵

$$g(f(x))=g\left(\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}\right)=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}}{\sqrt{۱-\frac{x^{۲}}{x^{۲}+۱}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}}{\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+۱}}}=x$$

حال داریم:

$$f\left(g(f(x))\right)=f(x)$$

در نتیجه کافی است مشتق تابع $f(x)$ در $x=\sqrt{۳}$ را به‌دست آوریم:

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}\Rightarrow f'(x)=\frac{(۱)(\sqrt{x^{۲}+۱})-\left(\frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲}+۱}}\right)(x)}{(\sqrt{x^{۲}+۱})^{۲}}\Rightarrow f'(x)=\frac{\sqrt{x^{۲}+۱}-\frac{x^{۲}}{\sqrt{x^{۲}+۱}}}{x^{۲}+۱}\Rightarrow f'(\sqrt{۳})=\frac{۲-\frac{۳}{۲}}{۴}=\frac{\frac{۱}{۲}}{۴}=\frac{۱}{۸}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۶ **سرنخ** از طرفین عبارت داده شده مشتق گرفته و $f'(۲)$ را به دست آورید.

با فرض $f(۲)=a$ داریم:

$$f^۳(x)+f(x)=x \xrightarrow{x=۲} a^۳+a=۲ \Rightarrow a=۱ \Rightarrow f(۲)=۱$$

حال از طرفین این رابطه مشتق می‌گیریم:

$$۳f^۲(x)f'(x)+f'(x)=۱ \xrightarrow{x=۲} ۳f^۲(۲)f'(۲)+f'(۲)=۱$$

$$۳\times ۱\times f'(۲)+f'(۲)=۱ \Rightarrow ۴f'(۲)=۱ \Rightarrow f'(۲)=\frac{۱}{۴}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۷ خط مماس بر نمودار f در دو نقطهٔ A و B موازی خط $y=۳x+۲$ است. پس مشتق تابع f در این دو نقطه برابر ۳ است:

$$f'(x)=\frac{۲-(-۱)}{(x+۱)^۲}=۳ \Rightarrow (x+۱)^۲=۱ \Rightarrow \begin{cases} x+۱=۱ \Rightarrow x=۰ \\ x+۱=-۱ \Rightarrow x=-۲ \end{cases}$$

پس $A(۰,-۱)$ و $B(-۲,۵)$ بوده و داریم:

معادلهٔ خط مماس در A: $y-(-۱)=۳\times(x-۰) \Rightarrow y=۳x-۱$

معادلهٔ خط مماس در B: $y-۵=۳(x+۲) \Rightarrow y=۳x+۱۱$

پس فاصلهٔ این دو خط موازی برابر است با:

$$d=\frac{|C-C'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|-۱-۱۱|}{\sqrt{۱^۲+۳^۲}}=\frac{۱۲}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۶}{۵}\sqrt{۱۰}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۸ چون تابع f در $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس عبارت $ax^۲+bx+۳$ به صورت $a(x-۲)^۲$ است:

$$a(x-۲)^۲=a(x^۲-۴x+۴)=ax^۲-۴ax+۴a$$

با مقایسهٔ این دو عبارت نتیجه می‌گیریم:

$$۴a=۳ \Rightarrow a=\frac{۳}{۴} \qquad b=-۴a \Rightarrow b=-۴\times\frac{۳}{۴}=-۳ \rightarrow a\times b=\frac{۳}{۴}\times(-۳)=-\frac{۹}{۴}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۹ **تک پله :** با توجه به صورت سؤال $f(۲)=۲, f'(۲)=۱, g(۲)=g'(۲)=۳$ است. حال از تابع $y=\frac{f(x)+g(x)}{x+f(x)}$ مشتق می‌گیریم و در آن $x=۲$ می‌گذاریم:

$$y'=\frac{\big(f'(x)+g'(x)\big)\big(x+f(x)\big)-\big(۱+f'(x)\big)\big(f(x)+g(x)\big)}{\big(x+f(x)\big)^۲} \xrightarrow{x=۲}$$

$$y'=\frac{\big(f'(۲)+g'(۲)\big)\big(۲+f(۲)\big)-\big(۱+f'(۲)\big)\big(f(۲)+g(۲)\big)}{\big(۲+f(۲)\big)^۲}=\frac{(۱+۳)(۲+۲)-(۱+۱)(۲+۳)}{(۲+۲)^۲}=\frac{۱۶-۱۰}{۱۶}=\frac{۳}{۸}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۰ **پلهٔ اول:** با توجه به اینکه مشتق تابع چند جمله‌ای درجهٔ n از درجهٔ $n-۱$ است پس $f(x)$ درجه ۳ می‌باشد.

$$f(x)=ax^۳+bx^۲+cx+d \Rightarrow f(۲x)=۸ax^۳+۴bx^۲+۲cx+d$$

می‌دانیم مشتق $f(u)$ برابر است با $u'f'(u)$ پس مشتق $f(۲x)$ می‌شود:

$$۲f'(۲x)=۲۴ax^۲+۸bx+۲c$$

پلهٔ دوم: حال می‌توان تابع $y=f(x)+۲f'(۲x)$ را نوشت:

$$\Rightarrow y=ax^۳+bx^۲+cx+d+۲۴ax^۲+۸bx+۲c$$

$$\Rightarrow y=ax^۳+(b+۲۴a)x^۲+(c+۸b)x+d+۲c$$

با توجه به‌صورت سوال داریم:

$$ax^۳+(b+۲۴a)x^۲+(c+۸b)x+d+۲c=x^۳+۱۲x^۲+۴x+۹$$

پلهٔ سوم: با مساوی قرار دادن ضرایب، مقادیر c, b, a و d به دست می‌آید.

$$\left.\begin{array}{l} a=۱ \\ b+۲۴a=۱۲ \Rightarrow b=-۱۲ \\ c+۸b=۴ \Rightarrow c=۱۰۰ \\ d+۲c=۹ \rightarrow d=-۱۹۱ \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=x^۳-۱۲x^۲+۱۰۰x-۱۹۱ \rightarrow f(-۱)=-۳۰۴$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۱ **پلهٔ اول:** عرض نقطهٔ مماس را به دست می‌آوریم.

$$y=\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۲} \xrightarrow{x_A=۱} y_A=۰ \rightarrow A(۱,۰)$$

پلهٔ دوم: شیب خط مماس در نقطه A را به‌دست آورده و معادله خط مماس را می‌نویسیم.

$$y'=\frac{-۱}{x^۲}+\frac{۲}{x^۳} \xrightarrow{x_A=۱} y'_A=-۱+۲=۱$$

معادله خط مماس در نقطه $\xrightarrow{A} y=x-۱$

پلهٔ سوم: خط مماس را با منحنی تلاقی می‌دهیم تا مختصات نقطه تلاقی دیگر (B) به‌دست آید.

$$\begin{cases} y=\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۲} \\ y=x-۱ \end{cases} \rightarrow x-۱=\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۲} \xrightarrow{\times x^۲} x^۳-x^۲=x-۱$$

$$\rightarrow x^۳-x^۲-x+۱=۰ \rightarrow (x-۱)^۲(x+۱)=۰$$

$$\rightarrow x=\pm ۱ \rightarrow B(-۱,-۲)$$

پلهٔ چهارم: فاصله دو نقطهٔ A و B برابر است با:

$$\overline{AB}=\sqrt{(-۱-۱)^۲+(-۲-۰)^۲}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۲ هر یک از ضابطه‌ها در بازهٔ خود پیوسته و مشتق‌پذیر هستند، بنابراین در نقطهٔ مرزی $x=۲$ باید:

۱- تابع پیوسته باشد:

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(۲x^۲+ax+۵)=۱۳+۲a$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(bx+a+۱)=۲b+a+۱$$

$$\Rightarrow ۱۳+۲a=۲b+a+۱\Rightarrow a-۲b=-۱۲$$

۲- مشتق چپ و راست تابع برابر باشند:

$$f'(x)=\begin{cases}۴x+a & ;x<۲\\ b & ;x>۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'_-(۲)=۸+a\\ f'_+(۲)=b\end{cases}\Rightarrow ۸+a=b$$

از دو معادلهٔ بالا $b=۴$ و $a=-۴$ به‌دست می‌آید، پس $ab=-۱۶$ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۳ **پله اول:** ابتدا درون قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم.

$$x^۲-۳x-۱۰=۰\Rightarrow(x-۵)(x+۲)=۰\Rightarrow x=۵ \text{ یا } x=-۲$$

اگر $x\geq ۵\Rightarrow f(x)=x^۲-۳x-۱۰-۲x^۲\Rightarrow f(x)=-x^۲-۳x-۱۰$

$$\Rightarrow f'(x)=-۲x-۳\Rightarrow -۲x-۳=+۹\Rightarrow -۲x=۱۲\Rightarrow x=-۶$$

عدد به‌دست آمده بزرگ‌تر از ۵ نیست پس قابل قبول نمی‌باشد.

پله دوم:

اگر $-۲\leq x<۵\Rightarrow f(x)=-x^۲+۳x+۱۰-۲x^۲$

$$\Rightarrow f(x)=-۳x^۲+۳x+۱۰\Rightarrow f'(x)=-۶x+۳$$

$$\Rightarrow -۶x+۳=۹\Rightarrow -۶x=۶\Rightarrow \boxed{x=-۱}$$

پله سوم:

اگر $x<-۲\Rightarrow f(x)=x^۲-۳x-۱۰-۲x^۲=-x^۲-۳x-۱۰$

$$\Rightarrow f'(x)=-۲x-۳=۹\Rightarrow \boxed{x=-۶}$$

پس مجموع جواب‌ها می‌شود. $(-۱)+(-۶)=-۷$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۴ **پلهٔ اول:** دامنه تابع $f(x)$ برابر $D_f = \mathbb{R} - \{۱\}$ است. $f'(x)$ و $f''(x)$ را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = x^۳ - \frac{۳}{۲}x^۲ + \frac{۵x(x-۱)}{x-۱} = x^۳ - \frac{۳}{۲}x^۲ + ۵x, x \neq ۱$$

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۳x + ۵ \Rightarrow f''(x) = ۶x - ۳$$

پلهٔ دوم:

$$f'(x) = ۲f''(x) - ۱ \rightarrow ۳x^۲ - ۳x + ۵ = ۲(۶x - ۳) - ۱$$

$$\rightarrow ۳x^۲ - ۱۵x + ۱۲ = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۱ \notin D_f \\ x = ۴ \text{ نقطهٔ مماس } (۴,۶۰) \end{cases}$$

پلهٔ سوم: شیب خط مماس بر تابع $f(x)$ را در نقطه مماس $(x = ۴)$ به دست آورده و معادله خط مماس را می‌نویسیم.

$$f'(۴) = ۳(۴)^۲ - ۳(۴) + ۵ = ۴۱$$

$$\xrightarrow{(۴,۶۰)} \text{معادله خط مماس}: y = ۴۱x - ۱۰۴$$

پلهٔ چهارم: با مقایسهٔ $ay = bx + c$ با معادلهٔ خط مماس، $a = ۱$، $b = ۴۱$ و $c = -۱۰۴$ است، پس: $a + b + c = ۱ + ۴۱ - ۱۰۴ = -۶۲$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۵ **پلهٔ اول:** آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازهٔ $[a,۳]$ برابر است با:

$$\frac{f(۳) - f(a)}{۳ - a} = \frac{۲}{۷} \Rightarrow \frac{\sqrt{۴} - \sqrt{a+۱}}{۳ - a} = \frac{۲}{۷} \Rightarrow ۱۴ - ۷\sqrt{a+۱} = ۶ - ۲a \Rightarrow ۷\sqrt{a+۱} = ۸ + ۲a \xrightarrow{\text{توان ۲}}$$

$$۴۹(a+۱) = \underbrace{(۸+۲a)^۲}_{۶۴+۳۲a+۴a^۲} \Rightarrow ۴a^۲ - ۱۷a + ۱۵ = ۰ \rightarrow (۴a - ۵)(a - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{۵}{۴} \\ a = ۳ \end{cases}$$

با توجه به بازهٔ $[a,۳]$ باید $a < ۳$ باشد، پس $a = \frac{۵}{۴}$ قابل قبول است.

پلهٔ دوم: حال آهنگ لحظه ای تغییر را در این نقطه به‌دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt{x+۱} \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}} \Rightarrow f'\left(\frac{۵}{۴}\right) = \frac{۱}{۲\sqrt{\frac{۹}{۴}}} = \frac{۱}{۲ \times \frac{۳}{۲}} = \frac{۱}{۳}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۶ **سرنخ** ابتدا پیوستگی و سپس مشتق چپ و راست را بررسی کنید.

با توجه به اینکه مشتق چپ و راست عددهای نابرابری هستند، پس تابع پیوستگی های چپ و راست دارد:

$$f(۱^+)=f(۱)=f(۱^-)$$

$$\frac{۱+a+b}{۲}=۱+a+b\rightarrow a+b+۱=۰$$

برای مشتق راست در $x=۱$ ، $[۲x]=۲$ است.

$$f(x)=\frac{x^۳+ax+b}{۲}\rightarrow f'(x)=\frac{۳x^۲+a}{۲}\rightarrow f'_+(۱)=\frac{۳+a}{۲}$$

برای مشتق چپ در $x=۱$ ، $[۲x]=۱$ است.

$$f(x)=\frac{x^۳+ax+b}{۱}\rightarrow f'(x)=۳x^۲+a$$

$$f'_-(۱)=۳+a$$

$$f'_+(۱)-f'_-(۱)=-\frac{۱}{۲}(۳+a)=۲\rightarrow ۳+a=-۴\rightarrow a=-۷$$

$$\rightarrow -۷+۱+b=۰\rightarrow b=۶$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۷ **سرنخ** از تابع $g(۲x)$ ، دو بار مشتق گرفته و برای مشتق تابع f از فرمول تعریف مشتق استفاده کنید.

می‌دانیم $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ برابر $f'(x)$ است، پس:

$$f'(x)=x^۲-۲x\Rightarrow f''(x)=۲x-۲$$

حالا از طرفین رابطهٔ $g(۲x)=f(x^۲-۱)$ دوبار مشتق می‌گیریم:

$$۲g'(۲x)=۲xf'(x^۲-۱)\xrightarrow{\text{مشتق}}۲g''(۲x)=f'(x^۲-۱)+۲x^۲f''(x^۲-۱)$$

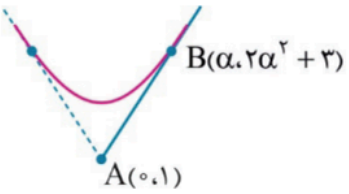
حالا $x=۱$ را قرار می‌دهیم تا $g''(۲)$ به‌دست آید:

$$۲g''(۲)=f'(۰)+۲f''(۰)\Rightarrow ۲g''(۲)=۰+۲\times(-۲)=-۴\Rightarrow g''(۲)=-۲$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۸ **سرنخ** توجه کنید که نقطهٔ A روی تابع $f(x)$ قرار ندارد، با استفاده از مختصات نقطهٔ A و نقطهٔ مماس فرضی روی تابع $f(x)$، شیب خط مماس را به‌دست آورید. یکبار هم شیب خط مماس را از مشتق در نقطهٔ مماس محاسبه کنید.

نقطهٔ $A(۰,۱)$ در معادلهٔ تابع صدق نمی کند. پس این نقطه روی تابع قرار ندارد. فرض می‌کنیم خط مماس رسم شده از نقطهٔ A، در نقطهٔ B بر نمودار مماس باشد. چون B روی نمودار تابع $f(x)=۲x^۲+۳$ قرار دارد، پس فرض می‌کنیم $B(\alpha,۲\alpha^۲+۳)$ است.



در ضمن شیب خط مماس بر نمودار در نقطهٔ B را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=۴x \Rightarrow m=۴\alpha$$

حالا معادلهٔ خط مماس را با کمک نقطهٔ B می‌نویسیم:

$$y-(۲\alpha^۲+۳)=۴\alpha(x-\alpha) \xrightarrow{(۰,۱)} ۱-(۲\alpha^۲+۳)=۴\alpha(-\alpha)$$

$$\Rightarrow ۲\alpha^۲=۲ \Rightarrow \alpha^۲=۱ \begin{cases} \alpha=۱ \\ \alpha=-۱ \end{cases}$$

معادلهٔ خط مماس را به‌ازای $\alpha=۱$ و $\alpha=-۱$ پیدا می‌کنیم:

$$\alpha=۱: y=۴x+۱$$

$$\alpha=-۱: y=-۴x+۱$$

هر دو قابل قبول‌اند، اما خط $y=۴x+۱$ در گزینه‌ها آمده است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۹ تابع $g(x)$ در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته است. حالا حاصل حد را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{h\to ۰^+} \frac{g(۱+h)-g(۱-h)}{h} \overset{HOP}{=\!=} \lim_{h\to ۰^+} \frac{g'(۱+h)+g'(۱-h)}{۱} = g'_+(۱)+g'_-(۱)$$

حالا ضابطهٔ تابع g را در اطراف $x=۱$ تعیین می‌کنیم و سپس از آن مشتق می‌گیریم:

$$۱)\ x>۱: [x]=۱ \Rightarrow g(x)=|x-۱|f(x)=(x-۱)(x^۲+x)$$

$$\Rightarrow g(x)=x^۳-x \Rightarrow g'(x)=۳x^۲-۱ \Rightarrow g'_+(۱)=۳-۱=۲$$

$$۲)\ x<۱: [x]=۰ \Rightarrow g(x)=|۰-۱|f(x)=(۱)(x^۳-۱)$$

$$\Rightarrow g'(x)=۳x^۲ \Rightarrow g'_-(۱)=۳$$

پس حاصل حد خواسته شده برابر است با:

$$g'_+(۱)+g'_-(۱)=۲+۳=۵$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۰ آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع fof در نقطهٔ $x=۱$ همان مشتق تابع fof در $x=۱$ است، پس ابتدا از تابع f مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\begin{cases}۲x-۳ & ;x\geq ۰\\ x^۲-۲x-۳ & ;x<۰\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۲ & ;x>۰\\ ۲x-۲ & ;x<۰\end{cases}$$

حالا مشتق تابع fof را در نقطهٔ $x=۱$ پیدا می‌کنیم:

$$(fof)'(x)=f'(x)\times f'\big(f(x)\big)\xrightarrow{x=۱}f'(۱)\times f'\big(f(۱)\big)$$
$$=f'(۱)\times f'(-۱)=۲\times -۴=-۸$$

حالا آهنگ متوسط تغییر تابع f را در بازهٔ $[-۱,۵]$ پیدا می‌کنیم:

$$\frac{f(۵)-f(-۱)}{۵-(-۱)}=\frac{(۲\times ۵-۳)-(۱+۲-۳)}{۶}=\frac{۷}{۶}$$

پس حاصل‌ضرب مقادیر خواسته شده برابر است با:

$$-۸\times\frac{۷}{۶}=\frac{-۲۸}{۳}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۱ **سرنخ** در واقع سؤال داره مشتق دوم f رو توی ۲- ازتون می‌پرسه، آستین‌ها رو بالا بزنید و برید سراغ مشتق گرفتن .....

پله اول: حد داده شده، تعریف مشتق تابع f' درنقطهٔ $x=-۲$ است. یعنی مشتق دوم تابع f در نقطهٔ $x=-۲$ است. ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده کرده و سپس مشتق می‌گیریم.

$$f(x)=\frac{x^۳-x^۲}{x^۲-۴x+۳}=\frac{x^۲(x-۱)}{(x-۳)(x-۱)}=\frac{x^۲}{x-۳}$$

$$f'(x)=\frac{۲x(x-۳)-x^۲}{(x-۳)^۲}=\frac{x^۲-۶x}{(x-۳)^۲}$$

پله دوم: مشتق دوم را به‌دست می‌آوریم:

$$f''(x)=\frac{(۲x-۶)(x-۳)^۲-۲(x-۳)(x^۲-۶x)}{(x-۳)^۴}$$

$$f''(x)=\frac{(۲x-۶)(x-۳)-۲(x^۲-۶x)}{(x-۳)^۳}$$

پله سوم: مقدار مشتق دوم را در $x=-۲$ محاسبه می‌کنیم:

$$f''(-۲)=\frac{(-۱۰)(-۵)-۲(۱۶)}{(-۵)^۳}=\frac{۵۰-۳۲}{-۱۲۵}=\frac{-۱۸}{۱۲۵}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۲ می‌دانیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x-a$ بخش پذیر است هرگاه $P(a)=۰$ باشد:

$$x+۲=۰\to x=-۲\Rightarrow P(-۲)=۰\to (-۲)^۴+a(-۲)^۳-۸(-۲)=۰$$

$$\Rightarrow ۱۶-۸a+۱۶=۰\to a=۴\to P(x)=x^۴+۴x^۳-۸x$$

حال معادلهٔ $P'(x)=۰$ را حل می‌کنیم:

$$P'(x)=۴x^۳+۱۲x^۲-۸=۰\to x^۳+۳x^۲-۲=۰$$

$$\to (x+۱)(x^۲+۲x-۲)=۰\to \begin{cases} x+۱=۰\to x=-۱ \\ x^۲+۲x-۲=۰\to x=-۱\pm\sqrt{۳} \end{cases}$$

بنابراین کوچک‌ترین ریشه برابر $x=-۱-\sqrt{۳}$ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۳ از آن جایی که بزرگ ترین درجهٔ عبارت $f(x)+f'(۲x)=x^۳+۱۲x^۲+۴x+۹$ از مرتبه ۳ می‌باشد نتیجه می گیریم $f(x)=ax^۳+bx^۲+cx+d$ خواهد بود، پس داریم:

$$f(x)+f'(۲x)=x^۳+۱۲x^۲+۴x+۹=ax^۳+(۱۲a+b)x^۲+(۴b+c)x+c+d$$

حال از تساوی به دست آمده نتیجه می‌گیریم:

$$ax^۳=x^۳\to a=۱ \qquad (۱۲a+b)x^۲=۱۲x^۲\to ۱۲+b=۱۲\to b=۰$$

$$(۴b+c)x=۴x\to ۴(۰)+c=۴\to c=۴ \qquad c+d=۹\to ۴+d=۹\to d=۵$$

بنابراین $f(x)=x^۳+۴x+۵$ می‌باشد پس:

$$f(-۱)=(-۱)^۳+۴(-۱)+۵=۰$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۴

$$y=\frac{f(x)}{xf(x-۱)}\to y'=\frac{f'(x)\big(xf(x-۱)\big)-\big(f(x-۱)+xf'(x-۱)\big)f(x)}{\big(xf(x-۱)\big)^۲}$$

$$\xrightarrow{x=۲} y'=\frac{f'(۲)\big(۲f(۱)\big)-\big(f(۱)+۲f'(۱)\big)f(۲)}{\big(۲f(۱)\big)^۲}$$

$$y'=\frac{۳(۶)-(۳+۴)(-۲)}{۳۶}=\frac{۱۸+۱۴}{۳۶}=\frac{۳۲}{۳۶}=\frac{۸}{۹}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۵

$$f(x)=(x-۴)\sqrt[۳]{x+۳}\to f'(x)=\sqrt[۳]{x+۳}+\frac{x-۴}{۳\sqrt[۳]{(x+۳)^۲}}$$

$$f(۵)=۲\,, \qquad f'(۵)=\frac{۲۵}{۱۲}$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f^۲(۵-h)-۳f(۵-h)+۲}{h(۵-h)}=\frac{۰}{۰}$$ مبهم

رفع ابهام : $\xrightarrow{hop}\lim_{h\to ۰}\frac{-۲f(۵-h)f'(۵-h)+۳f'(۵-h)}{۵-۲h}=\frac{-۲f(۵)f'(۵)+۳f'(۵)}{۵}=\frac{-۲(۲)\left(\frac{۲۵}{۱۲}\right)+۳\left(\frac{۲۵}{۱۲}\right)}{۵}=\frac{-۵}{۱۲}$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۶

$f'(x)=۳x^۲-۸x+۳$

$f(۱)=-۱, f'(۱)=-۲<۰ \Rightarrow$ نزولی است $f(x)$ ، $x=۱$ اطراف $\Rightarrow x\downarrow y\uparrow$

$\lim\limits_{x\to ۱^-}[f(x)]=\left[(-۱)^+\right]=-۱$

$f(۰)=-۱, f'(۰)=۳>۰ \Rightarrow$ صعودی است $f(x)$ ، $x=۰$ اطراف $\Rightarrow x\downarrow y\downarrow$

$\lim\limits_{x\to ۰^-}[f(x)]=\left[(-۱)^-\right]=-۲$

مجموع $=-۱-۲=-۳$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۷

پلهٔ اول: عرض نقطهٔ مماس را به دست می‌آوریم.

$$y'=\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۲}\xrightarrow{x_A=۱} y_A=۰\to A(۱,۰)$$

پلهٔ دوم: شیب خط مماس در نقطه A را به‌دست آورده و معادله خط مماس را می‌نویسیم.

$$y=\frac{-۱}{x^۲}+\frac{۲}{x^۳}\xrightarrow{x_A=۱} y'_A=-۱+۲=۱$$

معادله خط مماس در نقطه مماس $\xrightarrow{A} y=x-۱$

پلهٔ سوم: خط مماس را با منحنی تلاقی می‌دهیم تا مختصات نقطه تلاقی دیگر (B) به‌دست آید.

$$\begin{cases} y=\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۲} \\ y=x-۱ \end{cases} \to x-۱=\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۲}\xrightarrow{\times x^۲} x^۳-x^۲=x-۱\to x^۳-x^۲-x+۱=۰\to (x-۱)^۲(x+۱)=۰$$

$$\to x=\pm ۱\to B(-۱,-۲)$$

پلهٔ چهارم: فاصله دو نقطهٔ A و B برابر است با:

$$\overline{AB}=\sqrt{(-۱-۱)^۲+(-۲-۰)^۲}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۸ **پلهٔ اول:** آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازهٔ $[a,۳]$ برابر است با:

$$\frac{f(۳)-f(a)}{۳-a}=\frac{۲}{۷}\Rightarrow\frac{\sqrt{۴}-\sqrt{a+۱}}{۳-a}=\frac{۲}{۷}\Rightarrow ۱۴-۷\sqrt{a+۱}=۶-۲a\Rightarrow ۷\sqrt{a+۱}=۸+۲a\xrightarrow{\text{توان ۲}}$$

$$۴۹(a+۱)=\underbrace{(۸+۲a)^۲}_{۶۴+۳۲a+۴a^۲}\Rightarrow ۴a^۲-۱۷a+۱۵=۰$$

پلهٔ دوم: حال برای این که عبارت $۴a^۲-۱۷a+۱۵$ را راحت‌تر تجزیه کنیم، ضریب $a^۲$ در ۱۵ ضرب می‌کنیم:

$$۴a^۲-۱۷a+۱۵=۰\Rightarrow a^۲-۱۷a+۶۰=۰\Rightarrow(۴a-۵)(a-\frac{۱۲}{۴})=۰\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{۵}{۴}\\a=۳\end{cases}$$

با توجه به بازهٔ $[a,۳]$ باید $a<۳$ باشد، پس $a=\frac{۵}{۴}$ قابل قبول است.

پلهٔ سوم: حال آهنگ لحظه ای تغییر را در این نقطه به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt{x+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}\Rightarrow f'\left(\frac{۵}{۴}\right)=\frac{۱}{۲\sqrt{\frac{۹}{۴}}}=\frac{۱}{۲\times\frac{۳}{۲}}=\frac{۱}{۳}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۹ از طرفین عبارت $x^۲f(x)=f\big(f(x)-۲x\big)$ مشتق می‌گیریم:

$$۲xf(x)+x^۲f'(x)=\big(f'(x)-۲\big)f'\big(f(x)-۲x\big)$$

$$\xrightarrow{x=۲}۴f(۲)+۴f'(۲)=\big(f'(۲)-۲\big)f'\big(f(۲)-۴\big)$$

$$\rightarrow ۴f(۱)+۴(۴)=(۴-۲)f'(۱-۴)\rightarrow f'(-۳)=۱۰$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۰ با توجه به نمودار صورت سوال $f(۲)=۲$ و $m=f'(۲)=\frac{۲-a}{۲}$ است.

$$g(۲)=f\big(f(۲)\big)=f(۲)=۲$$

شیب خط مماس بر نمودار تابع g در $x=۲$ با مشتق تابع g در $x=۲$ برابر است.

$$g'(x)=f'(x)f'\big(f(x)\big)\xrightarrow{x=۲}g'(۲)=f'(۲)f'\big(f(۲)\big)=f'(۲)f'(۲)=f'^۲(۲)\qquad(۱)$$

$$\begin{cases}g(۲)=۲\\g(۰)=-۶\end{cases}\rightarrow g'(۲)=\frac{۲-(-۶)}{۲-۰}=\frac{۸}{۲}=۴$$

$$\xrightarrow{(۱)}g'(۲)=f'^۲(۲)\rightarrow ۴=\left(\frac{۲-a}{۲}\right)^۲\rightarrow\frac{۲-a}{۲}=\pm۲\xrightarrow{a<۰}\begin{cases}a=-۲&\checkmark\\a=۶&\times\end{cases}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۱ می‌دانیم شیب خط مماس بر منحنی با مشتق تابع در نقطهٔ مماس برابر است. از طرفی چون دو خط موازی دارای شیب یکسانی هستند، پس مشتق در نقطهٔ مماس برابر ۵ است.

$$y=\frac{۲x-۳}{x+۱}\rightarrow y'=\frac{۵}{(x+۱)^۲}=۵\rightarrow (x+۱)^۲=۱$$

$$\rightarrow x+۱=\pm ۱\rightarrow \begin{cases} x=۰\rightarrow A(۰,-۳) \\ x=-۲\rightarrow B(-۲,۷) \end{cases}$$

بنابراین مجموع عرض نقاط A و B برابر $۷+(-۳)=۴$ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۲ آهنگ متوسط تغییر تابع $g(x)$ در بازهٔ $[۵,۶]$ برابر است با:

$$\frac{g(۶)-g(۵)}{۶-۵}=\frac{\left(\sqrt{۶}+f(۵)\right)-\left(\sqrt{۵}+f(۴)\right)}{۱}$$

$$=\left(\sqrt{۶}+\sqrt{۵^۲-(۴\times ۵)}\right)-\left(\sqrt{۵}+\sqrt{۴^۲-(۴\times ۴)}\right)$$

$$=\sqrt{۶}+\sqrt{۵}-\sqrt{۵}-۰=\sqrt{۶}$$

حالا از تابع f مشتق می‌گیریم و آهنگ تغییر لحظه ای آن را در $x=-۲$ پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x^۲-۴x}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x-۴}{۲\sqrt{x^۲-۴x}}\Rightarrow f'(-۲)=\frac{-۴}{\sqrt{۱۲}}=\frac{-۲}{\sqrt{۳}}$$

بنابراین نسبت مقادیر خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\sqrt{۶}}{\frac{-۲}{\sqrt{۳}}}=-\frac{\sqrt{۱۸}}{۲}=-\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۳

$$f(x)=ax^۲+bx+c\xrightarrow{(۰,۰)}f(x)=ax^۲+bx$$

$$f'(x)=۲ax+b\rightarrow \begin{cases} f'(۲x)=۴ax+b \\ f'(۳x)=۶ax+b \end{cases}$$

$$f'(۲x)+f'(۳x)=۱۰ax+۲b=۲۰x+۸\rightarrow \begin{cases} ۱۰a=۲۰\rightarrow a=۲ \\ ۲b=۸\rightarrow b=۴ \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x)=۲x^۲+۴x\rightarrow f(۲)=۱۶$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۴ ضابطهٔ fof را تشکیل می‌دهیم

$$f\big(f(x)\big)=f(x)-۲[f(x)]$$
$$=x-۲[x]-۲[x-۲[x]]$$
$$=x-۲[x]-۲[x]+۴[x]$$
$$\Rightarrow fof(x)=x$$

با توجه به $D_{(fof)'}=D_{fof}-\{\text{نقاط مشتق ناپذیر}\}$ پس:

$$D_{(fof)'}=D_{fof}=\mathbb{R}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۵ ضابطهٔ $f(x)\cdot f(-x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)\cdot f(-x)=\left(x^{۳}+\sqrt{۲x^{۴}+x^{۶}}\right)\left(-x^{۳}+\sqrt{۲(-x)^{۴}+(-x)^{۶}}\right)$$
$$=\left(x^{۳}+\sqrt{۲x^{۴}+x^{۶}}\right)\left(-x^{۳}+\sqrt{۲x^{۴}+x^{۶}}\right)=(۲x^{۴}+x^{۶})-x^{۶}=۲x^{۴}$$

حال از طرفین مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)\cdot f(-x)+\big(-f'(-x)\big)\cdot f(x)=۸x^{۳}\rightarrow$$
$$f'(x)\cdot f(-x)-f'(-x)\cdot f(x)=۸x^{۳}$$

به جای x مقدار ۲ جایگذاری می‌کنیم:

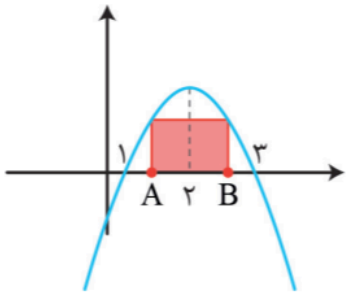
$$f'(۲)f(-۲)-f'(-۲)f(۲)=۶۴$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۶ نمودار تابع $f(x)=-(x-۱)(x-۳)$ را رسم می‌کنیم.

طول رأس سهمی $x=۲$ و طول نقطه‌های A و B را به ترتیب $۲+L$ و $۲-L$ در نظر می‌گیریم.

تابع مساحت را بر L می‌نویسیم.



$$S=۲L\cdot f(۲+L)=۲L\times-(۲+L-۱)(۲+L-۳)$$
$$=-۲L(L+۱)(L-۱)=-۲L(L^{۲}-۱)=-۲L-۲L^{۳}\rightarrow S'=۲-۶L^{۲}$$

اگر $x=\frac{۵}{۲}$ است پس $L=\frac{۱}{۲}$ می‌شود.

$$S'=۲-۶\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}=۲-\frac{۶}{۴}=۲-\frac{۳}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۷ از تابع مشتق می‌گیریم.

$$f'(x)=\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۴}}=\frac{x}{\sqrt{x^۲+۴}}\to f'(x)=\frac{x}{f(x)}\to f'(x)\cdot f(x)=x$$

از طرفین مشتق می‌گیریم.

$$f''(x)\cdot f(x)+f'(x)\cdot f'(x)=۱\to f''(x)\cdot f(x)+\big(f'(x)\big)^۲=۱\to$$

$$\sqrt{f''(x)\cdot f(x)+\big(f'(x)\big)^۲}=۱$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۸ $۲x-y=۱$ در $x=۲$ بر f مماس است پس $f(۲)=۳$, $f'(۲)=۲$

$$g(x)=(x+۲x)f^۲(x)=\begin{cases}۲^+:(x+۲)f^۲(x)\to y'=۱f^۲(x)+۲f(x)f'(x)(x+۲)\\ ۲^-:(x+۱)f^۲(x)\to y'=۱f^۲(x)+۲f(x)f'(x)(x+۱)\end{cases}$$

پس اختلاف مشتق‌های راست و چپ g در $x=۲$، برابر $۲f(۲)f'(۲)$ است که می‌شود ۱۲.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۹ مشتق $f^۲(\sqrt[۳]{f(u)})$ به‌صورت زیر است:

$$y'=۲f(\sqrt[۳]{f(u)})f'(\sqrt[۳]{f(u)})\frac{u'f'(u)}{۳\sqrt[۳]{(f(u))^۲}}$$

به‌ازای $x=۱$ مقدار $u=۲x-۱$ می‌شود ۱، مقدار $f(۱)$ هم ۱ است.

به مقدار $f'(۱)$ هم نیاز داریم:

$$f(x)=x^۴+|x-۳|-۲\xrightarrow{x<۳}f(x)=x^۴+۱-x\Rightarrow f'(۱)=۴(۱)^۳-۱=۳$$

پس:

$$y'=۲\underbrace{f(۱)}_{۱}\underbrace{f'(۱)}_{۳}\frac{۲\times\overbrace{f'(۱)}^{۳}}{۳\times۱}=۲\times۳\times۲=۱۲$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۰

$$\begin{matrix}x=۱\to g(۲)+f(۱)=۲\\ x=۲\to f(۱)+۲g(۲)=۱۲\end{matrix}\xrightarrow{\text{حل دستگاه}}\begin{cases}f(۱)=-۸\\ g(۲)=۱۰\end{cases}$$

$$\text{مشتق}\begin{cases}۲g'(۲x)+۳x^۲f'(x^۳)=۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\\ ۲f'(۲x-۳)+g(x)+xg'(x)=۳x^۲\end{cases}\begin{matrix}\xrightarrow{x=۱}\\ \xrightarrow{x=۲}\end{matrix}\begin{cases}۲g'(۲)+۳f'(۱)=\frac{۳}{۲}\\ ۲f'(۱)+\underbrace{g(۲)}_{۱۰}+۲g'(۲)=۱۲\end{cases}$$

$$\begin{cases}۲g'(۲)+۳f'(۱)=\frac{۳}{۲}\\ ۲g'(۲)+۳f'(۱)=۲\end{cases}\xrightarrow{(-)}f'(۱)=-\frac{۱}{۲}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۱ $x=۲$ پس تابع مماس است. پس $f'(۲)=\pm\infty$ و $b-۲x=۰\xrightarrow{x=۲}b=۴$

$$f(x)=۱+\sqrt[۳]{۴-۲x}\qquad f'(x)=\frac{-۲}{۳\sqrt[۳]{(۴-۲x)^{۲}}}$$

شیب خط $x+۶y=a$ برابر $-\frac{۱}{۶}$ است.

$$\frac{-۲}{۳\sqrt[۳]{(۴-۲x)^{۲}}}=-\frac{۱}{۶}\Rightarrow\sqrt[۳]{(۴-۲x)^{۲}}=۴\Rightarrow ۴-۲x=\pm۸\Rightarrow x=-۲,۶$$

$$f(-۲)=۳\xrightarrow{(-۲,۳)}x+۶y=a\Rightarrow a=۱۶$$

$$f(۶)=-۱\xrightarrow{(۶,-۱)}x+۶y=a\Rightarrow a=۰$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۲

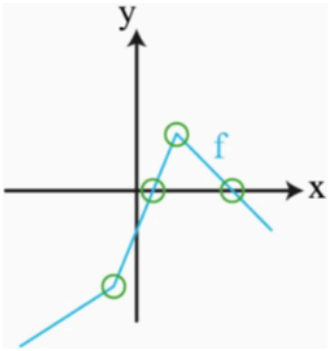
$$f(x)=\frac{x\left(\sqrt[۳]{(۲x-۱)^{۲}}-\sqrt[۳]{۲x-۱}+۱\right)}{۲x-۱+۱}=\frac{۱}{۲}\left((۲x-۱)^{\frac{۲}{۳}}-(۲x-۱)^{\frac{۱}{۳}}+۱\right)$$

$$f''(x)=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۲}{۳}\cdot\frac{-۱}{۳}\cdot۲\cdot۲(۲x-۱)^{-\frac{۴}{۳}}-\frac{۱}{۳}\cdot\frac{-۲}{۳}\cdot۲\cdot۲(۲x-۱)^{-\frac{۵}{۳}}\right)$$

$$f''(۱)=\frac{۱}{۲}\left(-\frac{۸}{۹}+\frac{۸}{۹}\right)=۰$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۳ $|f|$ در ۴ نقطه مشتق ندارد.



$$۲x-۴=۰\to x=۲$$

$$x+۱=۰\to x=-۱$$

$$|x+۱|=|۲x-۴|\to\begin{cases}x=۵\\x=۱\end{cases}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۴ تابع $x+[x]$ در ۱- و ۲ از چپ پیوسته نیست. پس تنها راه برای وجود مشتق‌های چپ این است که عامل صورت در این نقاط صفر شود. پس در صورت $a(x-۲)(x+۱)$ داریم:

$$f(x)=\frac{a(x-۲)(x+۱)}{x+[x]}\qquad f'_{-}(۲)=\frac{a(۱)(۲+۱)}{۲+۱}=a\qquad f'_{-}(-۱)=\frac{a(۱)(-۱-۲)}{-۱+(-۲)}=a$$

مجموع این‌ها می‌شود $۲a$. پس داریم:

$$۲a=۶\Rightarrow a=۳$$

و بنابراین:

$$f(۱)=\frac{۳(۱-۲)(۱+۱)}{۱+۱}=-۳$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۵ دقّت می‌کنیم که f در $x=۱$ مشتق‌پذیر است و داریم: $f(۱)=۲\,,\,f'(۱)=۳$

$$y=f^{۲}\left(\frac{f(x^{۲})}{\sqrt{x}}-۱\right)$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} y'=\underbrace{۲\downarrow}_{\text{توان}}\underbrace{f\left(\frac{f(x^{۲})}{\sqrt{x}}-۱\right)}_{\text{یک توان کمتر}}\times\underbrace{f'\left(\frac{f(x^{۲})}{\sqrt{x}}-۱\right)}_{\text{مشتق}}\times\underbrace{\frac{۲x\sqrt{x}f'(x^{۲})-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}f(x^{۲})}{x}}_{\text{مشتق توی پرانتز}}$$

به‌ازای $x=۱$ داریم:

$$y'(۱)=۲\times f(۱)\times f'(۱)\times\frac{۲f'(۱)-\frac{۱}{۲}f(۱)}{۱}$$

حالا مقادیر عددی را قرار دهیم:

$$=۲\times۲\times۳\times(۶-۱)=۶۰$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۶

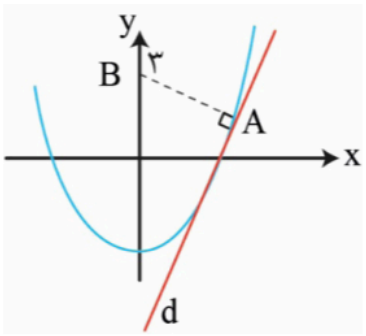
$$\begin{matrix}(-۲,۰)\\(۰,۴)\end{matrix}\rightarrow\text{معادله خط } y=۲x+۴\xrightarrow{x=۱}\begin{cases}A(۱,۶)\\m=۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}g(۱)=f(۲)=۶\\g'(۱)=۲\Rightarrow\frac{۱}{۲}f(۲)+۲f'(۲)=۲\Rightarrow f'(۲)=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to۲}\frac{f(x)-۶}{x-۲}\times\big(f(x)+۲\big)=f'(۲)\big(f(۲)+۲\big)=-\frac{۱}{۲}(۸)=-۴$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۷



$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۳-(۲x^{۲}-۳)}{۰-x}$$

$$m_d=f'(x)=۴x$$

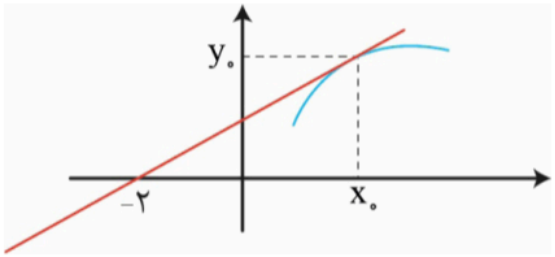
حاصل ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم برابر ۱- است.

$$\frac{۶-۲x^{۲}}{-x}\cdot۴x=-۱\rightarrow-۴(۶-۲x^{۲})=-۱\rightarrow۸x^{۲}-۲۴=-۱\rightarrow$$

$$۸x^{۲}=۲۳\rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۲۳}}{۲\sqrt{۲}}\rightarrow y=۲\left(\frac{۲۳}{۸}\right)-۳=\frac{۱۱}{۴}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۸ شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$ و $(-۲,۰)$ برابر مشتق تابع در $x_\circ$ است.



$$f'(x_\circ)=\frac{y_\circ-۰}{x_\circ-(-۲)}=\frac{y_\circ}{x_\circ+۲}$$

تساوی اخیر را در معادلهٔ $f(x_\circ)=(۲x_\circ-۳)f'(x_\circ)$ جایگذاری می‌کنیم.

$$y_\circ=(۲x_\circ-۳)\cdot\frac{y_\circ}{x_\circ+۲}\xrightarrow{y_\circ\neq۰}۱=\frac{۲x_\circ-۳}{x_\circ+۲}\to ۲x_\circ-۳=x_\circ+۲\to x_\circ=۵$$

در نتیجه:

$$\frac{f'(x_\circ)}{f(x)}=\frac{۱}{۲x_\circ-۳}=\frac{۱}{۲(۵)-۳}=\frac{۱}{۷}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۹

$$\begin{cases}A(۲,a+۱)\\ m=f'(۲)=-a\end{cases}\Rightarrow y=-ax+۳a+۱$$

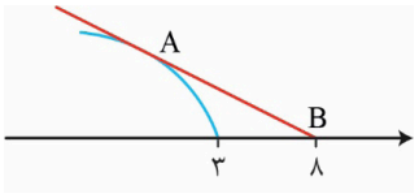
این خط بر $y=(x-۲a)^۲$ مماس است. پس معادله زیر ریشه مضاعف دارد.

$$x^۲-۴ax+۴a^۲=-ax+۳a+۱\Rightarrow x^۲-۳ax+۴a^۲-۳a-۱=۰$$

$$\Delta=۹a^۲-۱۶a^۲+۱۲a+۴=۰\Rightarrow ۷a^۲-۱۲a-۴=۰\Rightarrow a=۲,\frac{-۲}{۷}\to\text{نسبت}=\frac{۲}{\frac{-۲}{۷}}=-۷$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۰ نقطه A را به‌صورت $A:\left(a,\sqrt{۶-۲a}\right)$ در نظر می‌گیریم و شیب خط مماس که از دو نقطه A و B می‌گذرد را به‌دست می‌آوریم.



$$\left.\begin{array}{l}A:\left(a,\sqrt{۶-۲a}\right)\\ B:(۸,۰)\end{array}\right\}\quad m_{AB}=\frac{\sqrt{۶-۲a}}{a-۸}$$

$$f'(a)=m_{AB}\to\frac{-\cancel{۲}}{\cancel{۲}\sqrt{۶-۲a}}=\frac{\sqrt{۶-۲a}}{a-۸}\Rightarrow ۸-a=۶-۲a\to a=-۲\quad A:(-۲,\sqrt{۱۰})$$

پس فاصله A از مبدأ برابر $\sqrt{۴+۱۰}=\sqrt{۱۴}$ می‌شود.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۱ از آن‌جایی که منحنی بر محور xها مماس است پس صورت باید ریشه مضاعف داشته باشد. پس:

$$\begin{cases}x^۴+۲mx+۳=۰\\ ۴x^۳+۲m=۰\Rightarrow m=-۲x^۳\end{cases}$$

$$x^۴-۴x^۴+۳=۰\Rightarrow x=\pm۱\Rightarrow m=\pm۲$$

در معادله بالایی $m=-۲x^۳$ را جایگذاری می‌کنیم:

که جواب $m=-۲$ در گزینه‌ها موجود است.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۲ کسر را به مجموع دو تا کسر تفکیک می‌کنیم:

$$y=\frac{۲x-۵}{x^۲-۵x+۶}=\frac{۱}{x-۲}+\frac{۱}{x-۳}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}} y'=-(x-۲)^{-۲}-(x-۳)^{-۲} \xrightarrow[\text{مشتق}]{\text{دوباره}} y''=۲(x-۲)^{-۳}+۲(x-۳)^{-۳}$$

پس به‌ازای $x=۴$ داریم:

$$\rightarrow y''(۴)=\frac{۲}{۸}+۲=۲/۲۵$$

(ماروں ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۳ حد مخرج صفر است و حد وجود دارد پس حد صورت هم صفر بوده:

$$\lim_{x\to ۰} f(f(x+۲))-f(۱)=۰\Rightarrow f(f(۲))=f(۱)$$

$$\xrightarrow{f\text{ یک‌به‌یک است}} f(۲)=۱\Rightarrow f^{-۱}(۱)=۲$$

حالا داریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{f(f(x+۲))-f(۱)}{x}=f'(۱)+۲$$

$$\xrightarrow{HOP}\frac{f'(x+۲)f'(f(x+۲))-۰}{۱}=f'(۱)+۲$$

امّا f خطّی است پس $f'(\cdots)$ همواره برابر با مقدار ثابت m (شیب خط) است.

$$\Rightarrow m\times m=m+۲ \xrightarrow[m>۰]{f\text{ صعودی}} m=۲$$

و چون $f(۲)=۱$ است، ضابطهٔ f با شیب ۲ به‌صورت $f(x)=۲x-۳$ خواهد بود و در نتیجه $f(۴)=۵$.

f و g در نقطه به طول ۵ بر هم مماس‌اند پس $f'(۵)=g'(۵)=۲$ و داریم:

$$f(۰)+g'(۵)=-۳+۲=-۱$$

(ماروں ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۴ کسر را به مجموع دو تا کسر تفکیک می‌کنیم:

$$y=\frac{۲x-۵}{x^۲-۵x+۶}=\frac{۱}{x-۲}+\frac{۱}{x-۳}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}} y'=-(x-۲)^{-۲}-(x-۳)^{-۲} \xrightarrow[\text{مشتق}]{\text{دوباره}} y''=۲(x-۲)^{-۳}+۲(x-۳)^{-۳}$$

پس به‌ازای $x=۴$ داریم:

$$\rightarrow y''(۴)=\frac{۲}{۸}+۲=۲/۲۵$$

(ماروں ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۵ معادلهٔ تقاطع ضابطهٔ تابع خطی $y=۲x$ و $y=\log_{۲}^{\frac{۸^x+m}{۳}}$ ریشه مضاعف دارد.

$$y=\log_{۲}^{\frac{۸^x+m}{۳}}=۲x\rightarrow ۲^{۲x}=\frac{۸^x+m}{۳}\rightarrow ۳(۲^x)^۲=(۲^x)^۳+m$$

اگر ۲^x را t فرض کنیم:

$$۳t^۲=t^۳+m\rightarrow t^۳-۳t^۲+m=۰$$

این معادله ریشهٔ مضاعف دارد. از $t^۳-۳t^۲+m$ مشتق می‌گیریم.

$$۳t^۲-۶t=۰\rightarrow\begin{cases}t=۰\rightarrow ۲^x=۰ & \text{غ ق ق}\\ t=۲\end{cases}$$

ریشهٔ مضاعف مقدار خود $t^۳-۳t^۲+m=۰$ را صفر می‌کند.

$$۲^۳-۳(۲)^۲+m=۰\rightarrow ۸-۱۲+m=۰\rightarrow m=۴$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۶ پاسخ تشریحی **گام اول:** خط d در نقطهٔ A به طول $x=۴$ بر نمودار تابع f مماس شده است؛ پس شیب خط d برابر با $f'(۴)$ است. شیب خط d را از روی نمودار به دست می‌آوریم.

$$\text{شیب خط } d=\frac{۴-۰}{۴-(-۴)}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow f'(۴)=\frac{۱}{۲}\qquad (*)$$

گام دوم: حد خواسته‌شده را بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۴}\frac{f^۲(x)-۱۶}{۱۶-x^۲}=\frac{f^۲(۴)-۱۶}{۱۶-۱۶}=\frac{۰}{۰}\ (\text{مبهم است})$$

برای رفع ابهام، صورت و مخرج کسر را با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۴}\frac{(f(x)-۴)(f(x)+۴)}{(۴-x)(x+۴)}\overset{f(۴)=۴}{=\!=}\lim_{x\to ۴}-\underbrace{\left(\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}\right)}_{f'(۴)}\times\underbrace{\frac{\overbrace{f(۴)}^{۴}+۴}{۴+۴}}_{۱}=-f'(۴)\overset{(*)}{=\!=}-\frac{۱}{۲}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۷ پاسخ تشریحی **گام اول:** معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع y را در نقطه‌ای به طول $x=۲$ واقع بر آن می‌نویسیم. شیب این خط مماس برابر با $y'(۲)$ است که آن را با استفاده از تعریف مشتق حساب می‌کنیم.

$$y'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{y(x)-y(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)\log_{۰/۵}(x+۲)-۰}{x-۲}=\log_{۲^{-۱}}\overbrace{(۲+۲)}^{۲^۲}=-۲\log_{۲}^{۲}=-۲$$

گام دوم: نقطهٔ $(۲,۰)$ روی تابع قرار دارد. معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم:

$$y-۰=\overbrace{-۲}^{y'(۲)}(x-۲)\Rightarrow y=-۲x+۴\xrightarrow{x=۰}\text{عرض از مبدأ}: y=۴$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۸ **گام اول:** خط مماس بر نمودار سهمی $y=(x-۱)^۲$، با نیمساز ربع اول و سوم $(y=x)$ موازی است؛ پس شیب آن یک است. مشتق تابع را مساوی با یک قرار می‌دهیم تا طول نقطهٔ تماس به دست آید.

$$y'=۲(x-۱)\xrightarrow{y'=۱}۲(x-۱)=۱\Rightarrow x-۱=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

با قراردادن $x=\frac{۳}{۲}$ در تابع، عرض نقطهٔ تماس هم به دست می‌آید.

$$y=(\frac{۳}{۲}-۱)^۲\Rightarrow y=\frac{۱}{۴}\xrightarrow{\text{نقطهٔ تماس}}A(\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۴})$$

گام دوم: معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم. این خط با شیب یک از نقطهٔ $A(\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۴})$ عبور می‌کند.

$$y-\frac{۱}{۴}=۱\times(x-\frac{۳}{۲})\Rightarrow y=x-\frac{۵}{۴}$$

گام سوم: محور تقارن سهمی $y=(x-۱)^۲$ خط $x=۱$ است. عرض خط مماس را به ازای $x=۱$ به دست می‌آوریم.

$$y=۱-\frac{۵}{۴}=-\frac{۱}{۴}=-۰/۲۵$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۹ **گام اول:** خط $d_۱$ در $x=-۱$ بر نمودار تابع f مماس است؛ پس $m_{d_۱}=f'(-۱)=-\frac{۱}{۲}$ است. از طرفی شیب خط $d_۱$ برابر با تانژانت زاویه‌ای است که این خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد که طبق نمودار این زاویه $(\pi-\alpha)$ است؛ در نتیجه:

$$\begin{cases}m_d=\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha\\ m_d=-\frac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow -\tan\alpha=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{۱}{۲}$$

گام دوم: از طرفی طبق نمودار شیب خط $d_۲$ برابر با $\tan ۲\alpha$ است. از اتحاد مثلثاتی $\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$ استفاده می‌کنیم:

$$m_{d_۲}=\tan ۲\alpha=\frac{۲\times\frac{۱}{۲}}{۱-(\frac{۱}{۲})^۲}=\frac{۱}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۴}{۳}$$

گام سوم: معادلهٔ خط $d_۲$ را می‌نویسیم. این خط با شیب $\frac{۴}{۳}$ از مبدأ می‌گذرد.

$$y-۰=\frac{۴}{۳}(x-۰)\Rightarrow y=\frac{۴}{۳}x$$

گام چهارم: تابع f و خط $d_۲$ در نقطه‌ای به طول $x=۳$ مشترک هستند؛ پس:

$$f(۳)=y(۳)=\frac{۴}{۳}(۳)=۴$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

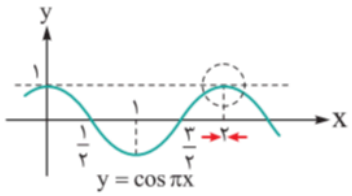
۱۵۰ **گام اول:** از تعریف مشتق برای محاسبهٔ $g'(۲)$ استفاده می‌کنیم.

$$g'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{\overbrace{\frac{x^۲-۴}{f(x)}}^{g(x)}-\overbrace{\frac{۲^۲-۴}{f(۲)}}^{g(۲)=۰}}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+۲)}{f(x)}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x+۲)}{f(x)}=\frac{۴}{\lim\limits_{x\to ۲}f(x)}\quad (۱)$$

گام دوم: کافی است $\lim\limits_{x\to ۲}f(x)$ را محاسبه کنیم و در (۱) جای‌گذاری کنیم.

$$\lim_{x\to ۲}f(x)=\lim_{x\to ۲}(x+[۳\cos \pi x])$$

گام سوم: مطابق نمودار تابع $y=\cos \pi x$ که در زیر آورده شده است، وقتی $x\to ۲$، $\cos \pi x$ با مقادیر کم‌تر از یک به یک نزدیک می‌شود، یعنی $\cos \pi x\to ۱^-$؛ پس:



$$\lim_{x\to ۲}f(x)=\lim_{x\to ۲}(x+[۳\cos \pi x])=۲+[۳\times(۱)^-]=۲+\underbrace{[۳^-]}_{۲}=۴\quad (۲)$$

گام چهارم: (۲) را در (۱) جای‌گذاری می‌کنیم.

$$g'(۲)=\frac{۴}{۴}=۱$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۱ راه اول: **گام اول:** طبق صورت سؤال $f'(۳)$ باید برابر با شیب خط $y=۲x-۹$ یعنی ۲ باشد. از تابع f مشتق می‌گیریم.

$$f(x)=ax^۲-۴ax \Rightarrow f'(x)=۲ax-۴a \xrightarrow{x=۳} f'(۳)=۶a-۴a=۲a \xrightarrow{f'(۳)=۲} ۲a=۲ \Rightarrow a=۱$$

$$\Rightarrow f(x)=x^۲-۴x$$

گام دوم: حاصل حد خواسته‌شده را حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x^۳-x}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۴x\overbrace{-((۱)^۲-۴)}^{+۳}}{x(x^۲-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x-۳)}{x(x-۱)(x+۱)}=\frac{۱-۳}{۱(۱+۱)}=-۱$$

توجه کنید که حد ابهام $\frac{۰}{۰}$ داشت که با استفاده از تجزیه، عامل صفرکننده در صورت و مخرج را پیدا کردیم و با هم ساده کردیم.

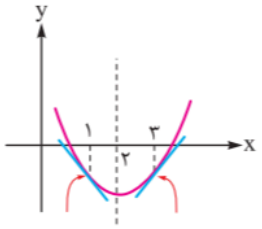
راه دوم:

نکته اگر دو نقطه از سهمی نسبت به محور تقارن آن قرینه باشند، شیب خط مماس بر سهمی در آن‌ها قرینهٔ یکدیگر است.



$$f'(x_۰-a)=-f'(x_۰+a)$$

گام اول: محور تقارن سهمی $f(x)=ax^۲-۴ax$ برابر با $x=\frac{۴a}{۲a}=۲$ است، پس سهمی نسبت به خط $x=۲$ تقارن دارد، یعنی $f'(\underbrace{۳}_{۲+۱})=-f'(\underbrace{۱}_{۲-۱})$ است و طبق سؤال $f'(۳)=۲$ است؛ پس $f'(۱)=-۲$ می‌شود.



به دلیل تقارن، شیب این دو خط قرینهٔ یکدیگر هستند، یعنی: $f'(۳)=-f'(۱)$

گام دوم: حد داده‌شده شباهت زیادی به تعریف مشتق در $x=۱$ دارد.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{(x-۱)\times x(x+۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{f'(۱)}{x(x+۱)}=\frac{-۲}{۲}=-۱$$

$f'(۱)$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

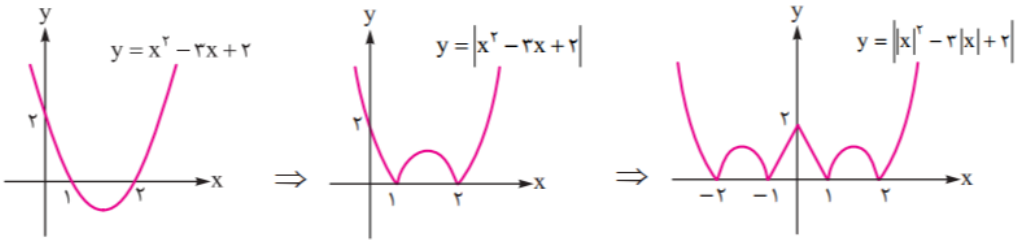
۱۵۲ **گام اول:** از رسم نمودار استفاده می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که $x^۲ = |x|^۲$ است؛ پس $f(x) = \big||x|^۲ - ۳|x| + ۲\big|$.

گام دوم: برای رسم نمودار تابع f، ابتدا نمودار تابع $y = \big|x^۲ - ۳x + ۲\big|$ را رسم می‌کنیم، سپس قسمت‌های سمت چپ محور yها را حذف کرده و قسمت‌های سمت راست محور yها را نسبت به این محور قرینه می‌کنیم.

گام سوم: برای رسم نمودار $y = \big|x^۲ - ۳x + ۲\big|$ هم ابتدا نمودار تابع $y = x^۲ - ۳x + ۲$ را رسم می‌کنیم، سپس قسمت‌هایی که زیر محور xها هستند را نسبت به این محور قرینه می‌کنیم.

$$y = x^۲ - ۳x + ۲ = (x-۱)(x-۲)$$

گام چهارم: نمودارها را رسم می‌کنیم.



گام پنجم: طبق نمودار، ۵ نقطه به طول‌های ۲، ۱، ۰، ۱−، ۲−، نقاط شکست نمودار هستند و تابع در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۳ **گام اول:** با تعیین علامت قدرمطلق، توابع f و g را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = ۲x - |x| = \begin{cases} ۲x - x = x & ۰ \le x \\ ۲x + x = ۳x & x < ۰ \end{cases}$$

$$g(x) = ax + |x| = \begin{cases} ax + x = (a+۱)x & ۰ \le x \\ ax - x = (a-۱)x & x < ۰ \end{cases}$$

گام دوم: تابع gof را تشکیل می‌دهیم.

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} (a+۱)f(x) & \overbrace{۰ \le f(x)}^{۰ \le x} \\ (a-۱)f(x) & \underbrace{f(x) < ۰}_{x < ۰} \end{cases} = \begin{cases} (a+۱)x & ۰ \le x \\ (a-۱)(۳x) & x < ۰ \end{cases}$$

گام سوم: برای آن‌که gof در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، در $x = ۰$ نیز باید مشتق‌پذیر باشد. تابع در $x = ۰$ پیوسته است (شرط لازم برقرار است). مشتق چپ و راست را برابر قرار می‌دهیم:

$$(gof)'_+(۰) = (gof)'_-(۰) \Rightarrow a+۱ = ۳(a-۱) \Rightarrow ۲a = ۴ \Rightarrow a = ۲$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۴ هر گزینه را در یک گام بررسی می‌کنیم.

گام اول: $[x]$ در تمام نقاط صحیح ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است. $x^۲$ در آن ضرب شده؛ پس فقط مشکل $x=۰$ حل می‌شود و $x^۲[x]$ در $\mathbb{Z}-\{۰\}$ مشتق‌ناپذیر است.

گام دوم: $|x|\sqrt[۳]{x}$ را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$|x|\sqrt[۳]{x}=\begin{cases}x\sqrt[۳]{x} & x\geq ۰\\ -x\sqrt[۳]{x} & x<۰\end{cases}=\begin{cases}x^{\frac{۴}{۳}} & x\geq ۰\\ -x^{\frac{۴}{۳}} & x<۰\end{cases}\xrightarrow{\text{مشتق}}\begin{cases}\frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}} & x\geq ۰\\ -\frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}} & x<۰\end{cases}$$

- این تابع در $x=۰$ پیوسته است.
- مشتق راست و چپ در $x=۰$ هر دو صفر می‌شوند.

$\Leftarrow$ پس در $x=۰$ مشتق‌پذیر است.

گام سوم: $x\left[\frac{۱}{x}\right]$ در $x=۰$ تعریف نمی‌شود و در نقاطی به طول‌های ±۱، $\frac{+۱}{۲}$، $\pm\frac{۱}{۳}$ و ... ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

گام چهارم: مشتق $y=\sqrt[۳]{x^۲}$ در $x=۰$ را حساب می‌کنیم:

$$y'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{x^۲}}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}\Rightarrow\begin{cases}y'_+(۰)=\frac{۱}{۰^+}=+\infty\\ y'_-(۰)=\frac{۱}{۰^-}=-\infty\end{cases}\Rightarrow \text{موجود نیست.}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۵ **گام اول:** برای نوشتن ضابطهٔ تابع g، به $f'(x)$ احتیاج داریم؛ پس:

$$f(x)=(x+a)^۲+b\Rightarrow f'(x)=۲(x+a)=۲x+۲a$$

گام دوم: ضابطهٔ تابع g را می‌نویسیم.

$$g(x)=\begin{cases}(x+a)^۲+b & ,\quad ۱\leq x\\ ۲x+۲a & ,\quad x<۱\end{cases}$$

گام سوم: برای آن‌که تابع g در $x=۱$ مشتق‌پذیر باشد، باید در این نقطه پیوسته باشد.

$$g(۱)=\lim_{x\to ۱^+}g(x)=\lim_{x\to ۱^-}g(x)\Rightarrow (۱+a)^۲+b=۲\times ۱+۲a\Rightarrow ۱+a^۲+۲a+b=۲+۲a\Rightarrow b=۱-a^۲\ (*)$$

گام چهارم: هم‌چنین مشتق چپ و راست تابع g در $x=۱$ باید برابر باشد.

$$g'_+(۱)=g'_-(۱)\Rightarrow ۲(\underbrace{x}_{۱}+a)=۲\Rightarrow ۲+۲a=۲\Rightarrow a=۰$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در (*)}}b=۱$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۶ **گام اول:** برای این‌که تابع f در $x=-۱$ مشتق‌پذیر باشد، در مرحلهٔ اول باید در این نقطه پیوسته باشد، چون $[x]$ در $x=-۱$ ناپیوسته است، پس باید عامل صفرشونده در آن ضرب شده باشد، یعنی $x^۳+ax^۲+۷x+b$، عامل $(x+۱)$ دارد؛ پس به ازای $x=-۱$ صفر می‌شود.

$$\xrightarrow{x=-۱} (-۱)^۳+a\times(-۱)^۲+۷(-۱)+b=۰ \Rightarrow a+b=۸ \quad (*)$$

گام دوم: مشتق تابع f را در $x=-۱$ با استفاده از تعریف می‌نویسیم.

$$f'(-۱)=\lim_{x\to-۱}\frac{\overbrace{(x^۳+ax^۲+۷x+b)[x]}^{(x+۱)(\text{عبارت درجه‌دوم})}}{x+۱}=\lim_{x\to-۱}(\text{عبارت درجه‌دوم})[x] \quad (**)$$

حد $(**)$ به شرطی وجود دارد که ضریب $[x]$، عامل صفرشونده $(x+۱)$ داشته باشد، پس نتیجه می‌گیریم که $x^۳+ax^۲+۷x+b$ عامل $(x+۱)^۲$ دارد، یعنی می‌توان آن را به صورت $(x+۱)^۲(x+k)$ نوشت؛ پس مشتق آن نیز در $x=-۱$ صفر می‌شود.

$$(x^۳+ax^۲+۷x+b)'=(۳x^۲+۲ax+۷) \xrightarrow{x=-۱} ۳(-۱)^۲+۲a(-۱)+۷=۰ \Rightarrow a=۵ \xrightarrow{(*)} b=۳$$

گام سوم: ضابطهٔ تابع f را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\underbrace{(x^۳+۵x^۲+۷x+\overbrace{۳}^{\text{عدد ثابت}})}_{(x+?)(x+۱)^۲}[x] \overset{?\times(۱)^۲=۳}{=\!=} (x+۳)(x+۱)^۲[x]$$

گام چهارم: به ازای $x=-۳$ تابع $[x]$ ناپیوسته است، ولی به خاطر وجود عامل صفرشونده $(x+۳)$ تابع پیوسته می‌شود، ولی هم‌چنان مشتق‌ناپذیر است (مشتق چپ و راست نابرابر دارد)؛ پس $x=-۳$ طول نقطهٔ گوشه‌ای نمودار است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۷ **گام اول:** از تابع f مشتق می‌گیریم.

$$f'(x)=\frac{(۲g(x)+۳x^۲)'(x+۱)-(x+۱)'(۲g(x)+۳x^۲)}{(x+۱)^۲}=\frac{(۲g'(x)+۶x)(x+۱)-(۱)(۲g(x)+۳x^۲)}{(x+۱)^۲}$$

گام دوم: در $f'(x)$ به جای x مقدار یک را قرار می‌دهیم.

$$f'(۱)=\frac{(۲g'(۱)+۶)(۱+۱)-۲g(۱)-۳(۱)^۲}{(۱+۱)^۲} \xrightarrow{g(۱)=g'(۱)=-۲} f'(۱)=\frac{\overbrace{(۲(-۲)+۶)}^{۲}(۲)-۲(-۲)-۳}{۴}$$

$$\Rightarrow f'(۱)=\frac{۴+۴-۳}{۴}=\frac{۵}{۴}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۸ **گام اول:** با استفاده از قوانین مشتق داریم.

$$۲f'.g+f.g'=f'.g+\underbrace{(f'.g+f.g')}_{(f.g)'}=f'.g+(f.g)' \quad (*)$$

از طرفی $f(x)=x(\sqrt{x}-۱)$ و $g(x)=(\sqrt{x}+۱)^۲$ است؛ پس حاصل $(*)$ برابر است با:

$$\underbrace{(x(\sqrt{x}-۱))'}_{(۱)}\times(\sqrt{x}+۱)^۲+\underbrace{(x(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)^۲)'}_{(۲)} \quad (**)$$

گام دوم: می‌خواهیم حاصل تابع $(**)$ را در $x=۱$ به دست آوریم. عبارت‌های (۱) و (۲) عامل صفرشوندهٔ $(\sqrt{x}-۱)$ دارند، پس برای محاسبهٔ مشتق آن‌ها در $x=۱$ کافی است از عامل صفرشونده مشتق بگیریم و حاصل را در سایر عامل‌ها ضرب کنیم؛ پس حاصل $(**)$ در $x=۱$ برابر می‌شود با:

$$(\sqrt{x}-۱)'x(\sqrt{x}+۱)^۲+(\sqrt{x}-۱)'x(\sqrt{x}+۱)^۲=۲\underbrace{(\sqrt{x}-۱)'}_{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}x(\sqrt{x}+۱)^۲ \xrightarrow{x=۱} ۲\times\frac{۱}{۲\sqrt{۱}}\times۱\times(\sqrt{۱}+۱)^۲=۴$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۹ **گام اول:** خط $y=۲x-۱$ در نقطه‌ای به طول $x=۳$ بر نمودار تابع f مماس است، پس شیب این خط برابر با مشتق تابع f در $x=۳$ است، یعنی: $f'(۳)=۲(*)$، هم‌چنین عرض نقطهٔ تماس $y(۳)=۲(۳)-۱=۵$ است، پس نقطهٔ $(۳,۵)$ روی تابع f هم هست؛ یعنی: $f(۳)=۵(**)$.

گام دوم: می‌خواهیم خط مماس بر تابع $y=f^۲(۳x)$ را در نقطه‌ای به طول $x=۱$ واقع بر این تابع به دست آوریم. ابتدا عرض نقطهٔ تماس را حساب می‌کنیم.

$$y(۱)=f^۲(۳\times۱)=f^۲(۳) \xrightarrow{(**)} y(۱)=۵^۲=۲۵ \Rightarrow \text{مختصات نقطهٔ تماس}: (۱,۲۵)$$

گام سوم: شیب خط مماس بر نمودار تابع $y=f^۲(۳x)$ در $x=۱$ برابر با مشتق این تابع در $x=۱$ است. تابع مشتق را حساب می‌کنیم.

$$(f^۲(۳x))'=۲f(۳x)\times f'(۳x)\times۳ \xrightarrow{x=۱} m=۲f(۳)\times f'(۳)\times۳ \xrightarrow{(**),(*)} m=۲\times۵\times۲\times۳=۶۰$$

گام چهارم: معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم.

$$y-۲۵=۶۰(x-۱) \Rightarrow y=۶۰x-۳۵ \Rightarrow \text{عرض از مبدأ}=-۳۵$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۰ **گام اول:** از تابع f مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{۲}(x^۲-۰/۵)}{\sqrt[۳]{x^۲-۱}}$$

$$f'(x)=\sqrt{۲}\times\frac{(x^۲-۰/۵)'\sqrt[۳]{x^۲-۱}-\overbrace{(\sqrt[۳]{x^۲-۱})'}^{(x^۲-۱)^{\frac{۱}{۳}}}(x^۲-۰/۵)}{(\sqrt[۳]{x^۲-۱})^۲}=\sqrt{۲}\times\frac{(۲x)\sqrt[۳]{x^۲-۱}-\frac{۱}{۳}(x^۲-۱)^{-\frac{۲}{۳}}\times۲x(x^۲-۰/۵)}{(\sqrt[۳]{x^۲-۱})^۲}$$

گام دوم: در تابع مشتق به جای xها، $\frac{۳}{\sqrt{۸}}$ و به جای $x^۲$ها، $\frac{۹}{۸}$ می‌گذاریم تا $f'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})$ به دست آید.

$$f'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=\sqrt{۲}\times\frac{۲(\frac{۳}{\sqrt{۸}})\sqrt[۳]{\frac{۹}{۸}-۱}-\frac{۱}{۳}(\frac{۹}{۸}-۱)^{-\frac{۲}{۳}}\times۲\times\frac{۳}{\sqrt{۸}}(\frac{۹}{۸}-\frac{۴}{۸})}{(\sqrt[۳]{\frac{۹}{۸}-۱})^۲}$$

$$\Rightarrow f'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=\sqrt{۲}\times\frac{۲\times۳}{۲\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{\frac{۱}{۸}}-\frac{۱}{۳}\times(\frac{۱}{۸})^{\frac{-۲}{۳}}\times\frac{۵}{۸}}{(\sqrt[۳]{\frac{۱}{۸}})^۲}=\frac{۳\times\frac{۱}{۲}-۴\times\frac{۵}{۸}}{\frac{۱}{۴}}=۶-۱۰=-۴$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۱ **گام اول:** خطی که عرض از مبدأ آن $b=-۲$ است و با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ۱۳۵° می‌سازد را L می‌نامیم و معادلهٔ آن را می‌نویسیم. شیب این خط برابر با تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد؛ پس:

$$\text{شیب خط: } m=\tan ۱۳۵^\circ=\tan(۱۸۰^\circ-۴۵^\circ)=-\tan ۴۵^\circ=-۱$$

$$\text{معادلهٔ خط: } y=mx+b \Rightarrow y=-۱\times x-۲ \Rightarrow \text{خط } L: y+x+۲=۰$$

گام دوم: نقطهٔ $M(x,y)$ بر روی تابع f است؛ پس مختصات آن به فرم $M(x,x^۲)$ است.

گام سوم: فاصلهٔ نقطهٔ $M(x,x^۲)$ را از خط $y+x+۲=۰$ به دست آورده و برابر با d قرار می‌دهیم:

$$d=\frac{|x^۲+x+۲|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}} \Rightarrow d(x)=\frac{x^۲+x+۲}{\sqrt{۲}} \quad \overbrace{\Delta<۰ \text{ و } a>۰ \Rightarrow +\text{همواره}}$$

گام چهارم: آهنگ متوسط تغییر تابع d در بازهٔ $[\alpha,\beta]$ برابر است با:

$$\bar{d}=\frac{d(\beta)-d(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times\frac{(\beta^۲-\alpha^۲)+(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times\frac{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha+۱)}{\beta-\alpha}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}(\beta+\alpha+۱)$$

پس آهنگ متوسط تغییر تابع d در بازهٔ $[\sqrt{۲}-۱,\sqrt{۲}]$ برابر است با:

$$\bar{d}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}(\sqrt{۲}-۱+\sqrt{۲}+۱)=۲$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۲ **گام اول:** ابتدا دامنهٔ تابع را حساب می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x}: ۰\le x\\ \sqrt{۶a-۲x}: ۰\le ۶a-۲x \Rightarrow x\le ۳a\end{array}\right\} \Rightarrow D_f=[۰,۳a]$$

گام دوم: از تابع f مشتق می‌گیریم و معادلهٔ $f'(x)=۰$ را حل می‌کنیم.

$$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{۶a-۲x}$$

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}-\frac{۲}{۲\sqrt{۶a-۲x}} \xrightarrow{f'(x)=۰} \frac{۱}{۲\sqrt{x}}-\frac{۱}{\sqrt{۶a-۲x}}=۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲\sqrt{x}}=\frac{۱}{\sqrt{۶a-۲x}}$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج‌ها}\neq ۰} ۲\sqrt{x}=\sqrt{۶a-۲x} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۴x=۶a-۲x \Rightarrow ۶x=۶a \Rightarrow x=a$$

گام سوم: نقاط بحرانی تابع $x=۰$، $x=a$ و $x=۳a$ هستند. مقدار تابع را در این نقاط به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}f(۰)=\sqrt{۰}+\sqrt{۶a-۰}=\sqrt{۶a}\\ f(a)=\sqrt{a}+\sqrt{۶a-۲a}=\sqrt{a}+۲\sqrt{a}=۳\sqrt{a} \Rightarrow \text{Max}\\ f(۳a)=\sqrt{۳a}+\sqrt{۶a-۶a}=\sqrt{۳a} \Rightarrow \text{Min}\end{cases}$$

توجه کنید با توجه به دامنهٔ تابع و صورت سؤال، حتماً $a>۰$ است.

گام چهارم: حاصل‌ضرب ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق به‌دست‌آمده را برابر با $۶\sqrt{۳}$ قرار می‌دهیم.

$$\text{Max}.\text{Min}=۳\sqrt{a}\times\sqrt{۳a}=۶\sqrt{۳} \Rightarrow ۳a\sqrt{۳}=۶\sqrt{۳} \Rightarrow a=۲$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

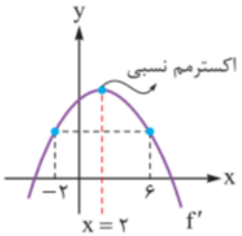
۱۶۳ **گام اول:** ضابطهٔ تابع درجه‌سوم f را به صورت $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ در نظر می‌گیریم و سپس $f'(x)$ را حساب می‌کنیم.

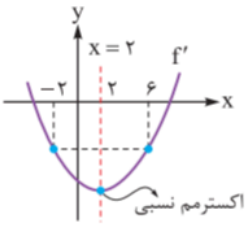
$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

گام دوم: تابع f' یک تابع درجه‌دوم است. از $f'(-2)=f'(6)$ نتیجه می‌گیریم که دو نقطه به طول‌های $x=-2$ و $x=6$ روی سهمی f'، دارای عرض‌های یکسان هستند، پس این نقاط نسبت به محور تقارن سهمی، قرینهٔ هم هستند؛ در نتیجه میانگین طول آن‌ها، معادلهٔ محور تقارن سهمی یا طول رأس سهمی را نتیجه می‌دهد.

$$x_{\text{رأس}}=\frac{-2+6}{2}=2$$

گام سوم: در تابع درجه‌دوم f'، طول رأس سهمی همان طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع است که در این‌جا $x=2$ به دست آمد.





(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۴ **پاسخ تشریحی** راه حل اول:

گام اول: تابع f را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}۳x-(x-۱)=۲x+۱ & ,\ ۱\le x\\ ۳x+x-۱=۴x-۱ & ,\ x<۱\end{cases}$$

گام دوم: در صورت کسر حد خواسته‌شده، $f(۱)$ را اضافه و کم می‌کنیم تا پس از تفکیک کسر، حدهای حاصل، شبیه مشتق تابع در $x=۱$ شوند.

$$\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۱+h)-f(۱-۲h)}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۱+h)-f(۱)+f(۱)-f(۱-۲h)}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\Big(\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}-\underbrace{\frac{f(۱-۲h)-f(۱)}{h}}_{(*)}\Big)$$

صورت و مخرج کسر $(*)$ را در (-۲) ضرب می‌کنیم تا این کسر هم شبیه تعریف مشتق شود.

$$\overbrace{\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}}^{f'_+(۱)}+۲\times\overbrace{\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۱-۲h)-f(۱)}{-۲h}}^{f'_-(۱)}=f'_+(۱)+۲f'_-(۱)\quad(۱)$$

$-۲h\to ۰^-$

گام سوم: با توجه به گام اول از تابع f مشتق می‌گیریم.

$$f'(x)=\begin{cases}۲ & ,\ ۱<x\\ ۴ & ,\ x<۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'_+(۱)=۲\\ f'_-(۱)=۴\end{cases}$$

گام چهارم: حاصل (۱) برابر است با:

$$۲+۲\times۴=۱۰$$

راه حل دوم:

گام دوم: با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال در صورت و مخرج کسر نسبت به h مشتق می‌گیریم:

$$\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۱+h)-f(۱-۲h)}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f'(۱+h)-(-۲)f'(۱-۲h)}{۱}=f'_+(۱)+۲f'_-(۱)$$

ادامهٔ راه حل مطابق گام سوم راه حل اول است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۵ **پاسخ تشریحی**

گام اول: می‌دانیم شیب خط مماس در هر نقطه از تابع f برابر با مشتق تابع در آن نقطه است. فرض کنید شیب خط مماس بر f برابر با m باشد، در این صورت معادلهٔ $f'(x)=m$ باید ریشهٔ حقیقی داشته باشد. ابتدا $f'(x)$ را به دست می‌آوریم.

$$f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-۲x^۲+۳x-۵$$

$$f'(x)=x^۲-۴x+۳$$

گام دوم: طبق گام اول، باید معادلهٔ $x^۲-۴x+۳=m$ ریشهٔ حقیقی داشته باشد؛ پس $\Delta\ge ۰$ است.

$$x^۲-۴x+۳-m=۰$$

$$\Delta\ge ۰\Rightarrow(-۴)^۲-۴(۳-m)\ge ۰\Rightarrow ۱۶-۱۲+۴m\ge ۰\Rightarrow ۴m\ge -۴\Rightarrow m\ge -۱$$

پس باید خطی را انتخاب کنیم که شیب آن بزرگ‌تر یا مساوی -۱ باشد و تنها ۳ این شرایط را دارد.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۶ **پاسخ تشریحی**

گام اول: ابتدا معادلهٔ خط مماس گفته‌شده را می‌نویسیم. این خط از دو نقطهٔ $(۴,۱)$ و $(۱,۰)$ عبور می‌کند.

$$y-۰=\frac{۱-۰}{۴-۱}(x-۱)\Rightarrow y=\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۳}\Rightarrow \text{شیب خط مماس}=\frac{۱}{۳}$$

گام دوم: شیب خط مماس برابر با مشتق تابع f در نقطهٔ تماس است، پس $f'(۴)=\frac{۱}{۳}$ است. هم‌چنین نقطهٔ $(۴,۱)$ روی تابع f است؛ پس $f(۴)=۱$.

گام سوم: از تابع $y=f\big(xf(x)\big)$ مشتق می‌گیریم.

$$y=f\big(xf(x)\big)\Rightarrow y'=\big(xf(x)\big)'f'\big(xf(x)\big)=\big(f(x)+xf'(x)\big)f'\big(xf(x)\big)$$

گام چهارم: مقدار مشتق را در $x=۴$ حساب می‌کنیم.

$$y'(۴)=\big(f(۴)+۴f'(۴)\big)f'\big(۴f(۴)\big)\xrightarrow[f'(۴)=\frac{۱}{۳}]{f(۴)=۱}y'(۴)=(۱+۴\times\frac{۱}{۳})\underbrace{f'(۴\times۱)}_{\frac{۱}{۳}}=\frac{۷}{۳}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۷}{۹}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۷ **پاسخ تشریحی**

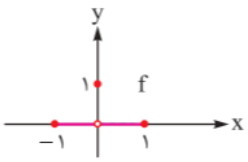
گام اول: ابتدا دامنهٔ تابع f را به دست می‌آوریم.

$$\text{زیر رادیکال}\geq ۰\Rightarrow ۰\leq ۱-x^۲\Rightarrow x^۲\leq ۱\Rightarrow -۱\leq x\leq ۱$$

گام دوم: طبق گام اول $x^۲\leq ۱$ است و از طرفی $x^۲\geq ۰$؛ پس:

$$۰\leq x^۲\leq ۱\xrightarrow{\times(-۱)}-۱\leq -x^۲\leq ۰\xrightarrow{+۱}۰\leq ۱-x^۲\leq ۱\xrightarrow{\sqrt{\ }}۰\leq\sqrt{۱-x^۲}\leq ۱\Rightarrow[\sqrt{۱-x^۲}]=۰\text{ یا }۱$$

گام سوم: طبق گام اول ضابطهٔ تابع f را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم.



$$f(x)=\begin{cases}۰ & -۱\leq x<۰\ \text{یا}\ ۰<x\leq ۱\\ ۱ & x=۰\end{cases}$$

گام چهارم: طبق نمودار، تابع f در $x=۰$ ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است.

طبق نمودار f، بدیهی است که $\sqrt{f(x)}$ هم در $x=۰$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است (نمودار آن دقیقاً مشابه $f(x)$ است)؛ پس ۱ و ۴ جواب نیستند.

گام پنجم: مشتق راست تابع $\sqrt{x}$ در $x=۰$ بی‌نهایت می‌شود؛ پس تابع $\sqrt{x}+f(x)$ در بازهٔ $[۰,۱)$ مشتق‌پذیر نیست.

گام ششم: ضابطهٔ تابع $y=xf(x)$ برابر با $y=۰, x\in[-۱,۱]$ است و این تابع در بازهٔ $(-۱,۱)$ مشتق‌پذیر است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۸ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** اول ضابطهٔ هر تابع را بدون قدرمطلق می‌نویسیم:

$$f(x)=x^۲-۳|x| \Rightarrow f(x)=\begin{cases}x^۲-۳x & x\geq ۰\\ x^۲+۳x & x<۰\end{cases}$$

$$g(x)=x^۳+|۲x| \Rightarrow g(x)=\begin{cases}x^۳+۲x & x\geq ۰\\ x^۳-۲x & x<۰\end{cases}$$

گام دوم: ضابطهٔ مشتق هر تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\begin{cases}x^۲-۳x & x\geq ۰\\ x^۲+۳x & x<۰\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۲x-۳ & x>۰\\ ۲x+۳ & x<۰\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}x^۳+۲x & x\geq ۰\\ x^۳-۲x & x<۰\end{cases} \Rightarrow g'(x)=\begin{cases}۳x^۲+۲ & x>۰\\ ۳x^۲-۲ & x<۰\end{cases}$$

گام سوم: ضابطهٔ مشتق دوم هر تابع را هم به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\begin{cases}۲x-۳ & x>۰\\ ۲x+۳ & x<۰\end{cases} \Rightarrow f''(x)=\begin{cases}۲ & x>۰\\ ۲ & x<۰\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases}۳x^۲+۲ & x>۰\\ ۳x^۲-۲ & x<۰\end{cases} \Rightarrow g''(x)=\begin{cases}۶x & x>۰\\ ۶x & x<۰\end{cases}$$

گام چهارم: حالا اول سراغ مشتق fog' در $x=-۱$ می‌رویم که برابر است با:

$$(fog')'(-۱)=g''(-۱)f'(g'(-۱))$$

$g''(-۱)=۶\times(-۱)=-۶$ و $g'(-۱)=۳\times(-۱)^۲-۲=۱$ است، پس:

$$g''(-۱)f'(g'(-۱))=-۶f'(۱)=-۶\times(-۱)=+۶$$

گام پنجم: در آخر، مشتق تابع gof' در $x=۱$ را محاسبه می‌کنیم:

$$(gof')'(۱)=f''(۱).g'(f'(۱))$$

$f''(۱)=۲$ و $f'(۱)=۲\times۱-۳=-۱$ است، پس:

$$f''(۱).g'(f'(۱))=۲g'(-۱)=۲\times۱=۲$$

بنابراین جواب برابر $\frac{۶}{۲}=۳$ می‌شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۹ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** با توجه به ضابطهٔ f، f در $x=۱$ مشتق‌پذیر است.

گام دوم: با جای‌گذاری $h=۰$ در $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f^۲(۱-h)-f^۲(۱+۲h)}{h}$ به صفر صفرم می‌رسیم، پس باید رفع ابهام کنیم. حالا چون f در $x=۱$ مشتق‌پذیر است، با استفاده از هوپیتال، رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f^۲(۱-h)-f^۲(۱+۲h)}{h} \overset{HOP}{=\!=} \lim_{h\to ۰}\frac{۲\times(-۱)\times f'(۱-h)\times f(۱-h)-۲\times۲\times f'(۱+۲h)f(۱+۲h)}{۱}$$

$$=-۲f'(۱)f(۱)-۴f'(۱)f(۱)=-۶f'(۱)f(۱)$$

گام سوم: باید مقدار f و f' در $x=۱$ را پیدا کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x}(۳x^۲+۵) \Rightarrow f(۱)=۸$$

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۳x^۲+۵)+\sqrt{x}\times۶x \Rightarrow f'(۱)=\frac{۱}{۲}\times۸+۱\times۶=۱۰$$

بنابراین جواب برابر $-۶\times۱۰\times۸=-۴۸۰$ $-۶f'(۱)f(۱)$ می‌شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۰ پاسخ تشریحی راه اول: **گام اول:** دامنه و برد تابع $f(x)=x\sqrt{x}+۱$، به ترتیب برابر با $D_f=[۰,+\infty)$ و $R_f=[۱,+\infty)$ است. ضابطهٔ تابع $f^{-۱}$ را پیدا می‌کنیم:

$$y=x\sqrt{x}+۱ \Rightarrow y-۱=x^{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow x^۳=(y-۱)^۲ \Rightarrow x=\sqrt[۳]{(y-۱)^۲}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{(x-۱)^۲} \quad , \quad D_{f^{-۱}}=[۱,+\infty), R_{f^{-۱}}=[۰,+\infty)$$

گام دوم: حالا مشتق تابع $f^{-۱}$ را به دست می‌آوریم تا بتوانیم شیب خط مماس بر این منحنی در $x=۹$ را پیدا کنیم:

$$(f^{-۱}(x))'=\frac{۲}{۳}(x-۱)^{\frac{-۱}{۳}}=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x-۱}}$$

$$(f^{-۱}(۹))'=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{۸}}=\frac{۱}{۳}$$

گام سوم:

راه دوم:

اگر از روش دوم گفته‌شده در درس‌نامه استفاده کنیم، داریم:

$$(a,۹)\xrightarrow{\text{روی } f} x\sqrt{x}+۱=۹ \Rightarrow x=۴$$

$$f'(۴)=\frac{۱}{(f^{-۱}(۹))'} \Rightarrow f'(x)=(x\sqrt{x}+۱)'=\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow f'(۴)=۳ \Rightarrow (f^{-۱}(۹))'=\frac{۱}{۳}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۱ پاسخ تشریحی **گام اول:** در حد $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(h-۱)-۵}{۲h}=-\frac{۱}{۴}$، مخرج به ازای $h=۰$، صفر است و حاصل حد، عددی حقیقی است؛ پس صورت نیز به ازای $h=۰$ صفر است:

$$f(-۱)-۵=۰ \Rightarrow f(-۱)=۵$$

گام دوم: در حد داده‌شده، از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(h-۱)-۵}{۲h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f'(h-۱)}{۲}=\frac{f'(-۱)}{۲}=-\frac{۱}{۴} \Rightarrow f'(-۱)=-\frac{۱}{۲}$$

گام سوم: حالا مشتق تابع g را به دست می‌آوریم:

$$g(۲x)=\sqrt[۳]{x}f(\frac{۱}{x}) \Rightarrow ۲g'(۲x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}f(\frac{۱}{x})-\frac{۱}{x^۲}\sqrt[۳]{x}f'(\frac{۱}{x})$$

$$\xrightarrow{x=-۱} ۲g'(-۲)=\frac{۱}{۳}f(-۱)+f'(-۱)$$

از گام اول و دوم، مقادیر $f(-۱)$ و $f'(-۱)$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۲g'(-۲)=\frac{۵}{۳}-\frac{۱}{۲}=\frac{۷}{۶} \Rightarrow g'(-۲)=\frac{۷}{۱۲}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۲ پاسخ تشریحی **گام اول:** تابع f را به کمک تابع g داده‌شده، تشکیل می‌دهیم:

$$g(x)=x^3-3bx^2-2cx \Rightarrow g'(x)=3x^2-6bx-2c \Rightarrow g''(x)=6x-6b$$

$$f(x)=\begin{cases}3x^2-6bx-2c & x\geq b\\ 6x-6b+cx & x<b\end{cases}$$

گام دوم: از آن‌جایی که تابع f مشتق‌پذیر است، در نقطهٔ مرزی $x=b$ ، ۲ شرط باید برقرار باشد:

$$1)\ f(b)=\lim_{x\to b^+}f(x)=\lim_{x\to b^-}f(x)$$

$$2)\ f'_+(b)=f'_-(b)$$

هر یک از شرط‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$(1)\ \text{شرط}: 3b^2-6b^2-2c=6b-6b+bc \Rightarrow -3b^2-2c=bc \Rightarrow c=\frac{-3b^2}{b+2} \quad (*)$$

$$(2)\ \text{شرط}: f'(x)=\begin{cases}6x-6b & x>b\\ 6+c & x<b\end{cases}$$

$$f'_+(b)=6b-6b=f'_-(b)=6+c \Rightarrow c=-6 \quad (I)$$

گام سوم: مقدار c به‌دست‌آمده را در (*) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$-3b^2=-6(b+2) \Rightarrow b^2-2b-4=0 \Rightarrow (b-1)^2-1-4=0 \Rightarrow (b-1)^2=5 \quad (II)$$

گام چهارم: حاصل عبارت خواسته‌شده، با توجه به (I) و (II)، برابر است با:

$$c^2+(b-1)^2=36+5=41$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۳

$$g'\left(\sqrt[5]{3}\right)f'\left(g\left(\sqrt[5]{3}\right)\right)=(fog)'\left(\sqrt[5]{3}\right)$$

$$g(x)=\begin{cases}\text{تعریف نشده} & :x\leq 0\\ \frac{1}{2x^5} & :x>0\end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases}\text{تعریف نشده} & :x\leq 0\\ -\frac{1}{\sqrt[5]{2x}} & :x>0\end{cases}$$

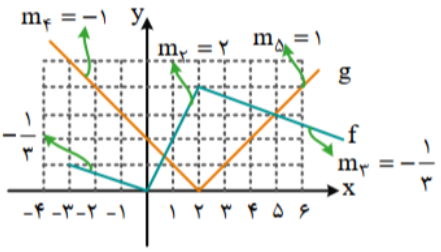
$$x>0 \Rightarrow fog(x)=-\frac{1}{\sqrt[5]{2g(x)}}=-\frac{1}{\sqrt[5]{2\times\frac{1}{2x^5}}}=-x$$

پس چون $\sqrt[5]{3}>0$ آن‌گاه $(fog)'\left(\sqrt[5]{3}\right)$ برابر -1 خواهد شد.

$$(fog)'(x)=-1$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۴ روی نمودار، شیب خطوط را مشخص می‌کنیم. داریم:



$$1)\ (2f-3g)'(3)=2f'(3)-3g'(3)=2m_3-3m_5=2\left(-\frac{1}{3}\right)-3(1)=-\frac{11}{3}$$

$$2)\ (f\times g)'(1)=f'(1)g(1)+g'(1)f(1)=(m_3\times 1)+(m_4\times 2)=(2\times 1)+(-1\times 2)=0$$

$$3)\ (fog)'(-2)=g'(-2)\times f'\left(g(-2)\right)=m_4\times f'(4)=m_4\times m_3=-1\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

$$4)\ f'_+(0)-f'_-(0)=m_2-m_1=2-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{3}$$

بنابراین گزینه ۳ جواب می‌باشد.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۵ ضابطهٔ f را ساده‌تر (بدون رادیکال) نوشته و مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=x\sqrt[3]{(\frac{3x-1}{x+5})^2}=x(\frac{3x-1}{x+5})^{\frac{2}{3}}\Rightarrow f'(x)=1\times(\frac{3x-1}{x+5})^{\frac{2}{3}}+(\frac{2}{3}(\frac{16}{(x+5)^2})(\frac{3x-1}{x+5})^{-\frac{1}{3}})(x)$$

(خود اولی: $(\frac{3x-1}{x+5})^{-\frac{1}{3}}$؛ مشتق اولی: $1\times$؛ خود دومی: $(\frac{3x-1}{x+5})^{\frac{2}{3}}$؛ مشتق دومی: $(\frac{2}{3}(\frac{16}{(x+5)^2})(\frac{3x-1}{x+5})^{-\frac{1}{3}})(x)$؛ مشتق داخل پرانتز: $\frac{16}{(x+5)^2}$؛ توان یکی کمتر: $(\frac{3x-1}{x+5})^{-\frac{1}{3}}$)

به ازای $x=3$ داریم:

$$f'(3)=1\times(1)^{\frac{2}{3}}+(\frac{2}{3}(\frac{16}{64})(1)^{-\frac{1}{3}})(3)=1+(\frac{1}{6})(3)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

از آن‌جایی که $f(3)=3$، بنابراین معادلهٔ خط مماس اینگونه خواهد بود:

$$y-y_0=m(x-x_0)\xrightarrow[f(3)=3]{m=\frac{3}{2}}y-3=\frac{3}{2}(x-3)\Rightarrow y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\Rightarrow \text{عرض از مبدأ}=-\frac{3}{2}$$

(مازاد ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۶ در $x=2$ صورت کسر صفر می‌شود (عامل صفرشونده)، پس از صورت کسر مشتق گرفته و از بقیه عبارت به ازای $x\to 2$ حد می‌گیریم:

$$g(x)=\frac{2-x}{f(x)-3[x]}\Rightarrow g'(2)=\frac{-1}{\lim\limits_{x\to 2}(f(x)-3[x])}\ (*)$$

طبق نمودار $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=3$ و $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=0$، پس:

$$\lim_{x\to 2^+}(f(x)-3[x])=3-3(2)=-3\xrightarrow{(*)}g'_+(2)=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$$
$$\lim_{x\to 2^-}(f(x)-3[x])=0-3(1)=-3\xrightarrow{(*)}g'_-(2)=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow g'(2)=\frac{1}{3}$$

(مازاد ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۷ اولاً: خط $y=2x+1$ در $x=3$ بر نمودار $g(x)$ مماس است:

$$\begin{cases}y=2x+1\xrightarrow{x=3}y=7\Rightarrow g(3)=7\\ y=2x+1\Rightarrow y'=2\Rightarrow g'(3)=2\end{cases}$$

ثانیاً: تعریف مشتق داده شده را با«قاعدهٔ هوپیتال» رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(7)-f(7-5h)}{h^2-3h}=10\xrightarrow{HOP}\lim_{h\to 0}\frac{0-(-5)f'(7-5h)}{2h-3}=10\Rightarrow\frac{5f'(7)}{-3}=10\Rightarrow f'(7)=-6$$

حالا مشتق تابع fog را در $x=3$ به دست می‌آوریم:

$$f(g(x))\Rightarrow y'=g'(x)\times f'(g(x))\xrightarrow{x=3}y'=g'(3)f'(g(3))=2f'(7)=2\times(-6)=-12$$

(مازاد ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۸ از رابطهٔ $f(x)=xg(x)+1$، ضابطهٔ $g(x)$ را می‌یابیم:

$$f(x)=xg(x)+1\Rightarrow f(x)-1=xg(x)\Rightarrow g(x)=\frac{f(x)-1}{x}$$

حالا $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ معادل با $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}$ است. از آن‌جایی که $f(x)=(\frac{-1+3x}{1+5x})^2$ داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{1}=f'(0)$$

مشتق f را در $x=0$ می‌یابیم:

$$2(\frac{8}{(1+5x)^2})(\frac{-1+3x}{1+5x})\Rightarrow f'(0)=2(\frac{8}{1})(\frac{-1}{1})=-16$$

(مازاد ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۹ ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=(x^۲+۳x-۴)(x^۲-۳x-۴)=(x+۴)(x-۱)(x-۴)(x+۱)=(x^۲-۱۶)(x^۲-۱)=x^۴-۱۷x^۲+۱۶$$

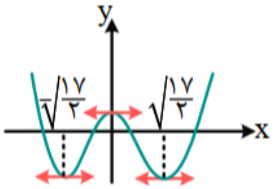
خط مماس، افقی است، پس شیب آن صفر است.

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۴x^۳-۳۴x=۰\Rightarrow ۲x(۲x^۲-۱۷)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ ۲x^۲-۱۷=۰\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{۱۷}{۲}}\end{cases}$$

حواستان باشد گرچه در «سه نقطه» خط مماس موازی محور x است، ولی فقط «دو خط مماس» رسم می‌شود، چون به ازای $x=\pm\sqrt{\frac{۱۷}{۲}}$ عرض‌های یکسانی به دست می‌آید و دلیلش زوج بودن توان x در ضابطهٔ تابع است که به ازای $\pm\sqrt{\frac{۱۷}{۲}}$ حاصل تابع یکسان است.

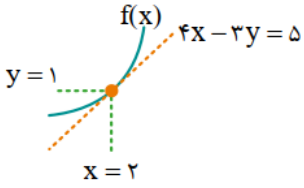
در واقع یک خط بر هر دو نقطهٔ مماس می‌شود، اینطوری:

$$\text{خطوط مماس افقی}\Rightarrow\begin{cases}y=۰\\ y=f(\pm\sqrt{\frac{۱۷}{۲}})\end{cases}$$



(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۰ **اولاً:** خط $۴x-۳y=۵$ در $x=۲$ بر نمودار f مماس است. به ازای $x=۲$ عرض این خط $y=۱$ خواهد بود، ضمناً شیب این خط $\frac{۴}{۳}$ است. بنابراین:



$$\Rightarrow\begin{cases}f(۲)=۱\\ f'(۲)=\frac{۴}{۳}\end{cases}$$

ثانیاً: دوره تناوب تابع $T=۳$ است، یعنی ۳ واحد ۳ واحد به راست یا چپ برویم، مقادیر بالا تکرار می‌شوند:

$$\begin{cases}\ldots\xleftarrow{T}f(-۴)\xleftarrow{T}f(-۱)=۱\xleftarrow{T}f(۲)=۱\xrightarrow{T}f(۵)=۱\xrightarrow{T}\ldots\\ \ldots\xleftarrow{T}f'(-۴)=\frac{۴}{۳}\xleftarrow{T}f'(-۱)=\frac{۴}{۳}\xleftarrow{T}f'(۲)=\frac{۴}{۳}\xrightarrow{T}f'(۵)=\frac{۴}{۳}\xrightarrow{T}\ldots\end{cases}$$

بنابراین با مشتق‌گیری از رابطهٔ داده شده، داریم:

$$g(۲x)=f(۶x+۲)-f(-۸x)\xrightarrow{\text{مشتق}}۲g'(۲x)=۶f'(۶x+۲)+۸f'(-۸x)$$

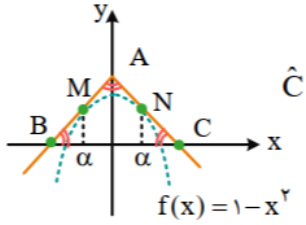
برای یافتن $g'(۱)$ باید $x=\frac{۱}{۲}$ قرار دهیم:

$$۲g'(۱)=۶f'(۵)+۸f'(-۴)\Rightarrow ۲g'(۱)=۶(\frac{۴}{۳})+۸(\frac{۴}{۳})\Rightarrow ۲g'(۱)=\frac{۵۶}{۳}\Rightarrow g'(۱)=\frac{۲۸}{۳}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۱ مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است، پس همهٔ زوایای آن ۶۰° می‌باشد. بنابراین:

$$\hat{C}=۶۰^\circ\Rightarrow\tan ۶۰^\circ=\sqrt{۳}\Rightarrow \text{شیب AC}=-\sqrt{۳}\Rightarrow f'(\alpha)=-\sqrt{۳}$$



از آن‌جایی که $f(x)=۱-x^۲$، پس $f'(x)=-۲x$، در نتیجه:

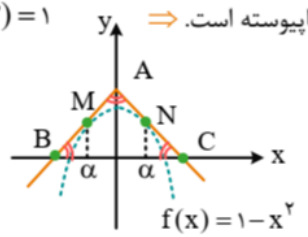
$$f'(\alpha)=-\sqrt{۳}\Rightarrow -۲\alpha=-\sqrt{۳}\Rightarrow\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow y_N=y_M=f(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=۱-(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲=۱-\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

وایسا، نرو! دقت کنید که چون A روی محور تقارن سهمی است، پس طول نقاط N و M قرینه بوده و عرض آن‌ها یکسان است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۲ ابتدا پیوستگی چپ و راست تابع f را در $x=۲$ بررسی می‌کنیم. چون شرط لازم برای وجود مشتق چپ و راست است:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\sqrt{۴-۴}=۰\\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\frac{۱۶}{۸}=۲\\ f(۲)=۱\end{cases} \Rightarrow \text{تابع } f \text{ در } x=۲ \text{ از چپ و راست ناپیوسته است.}$$



مثلث ABC،متساوی‌الاضلاع است، پس همهٔ زوایای آن ۶۰° می‌باشد. بنابراین:

$$\hat{C}=۶۰^\circ \Rightarrow \tan ۶۰^\circ=\sqrt{۳} \Rightarrow \text{شیب } AC=-\sqrt{۳} \Rightarrow f'(\alpha)=-\sqrt{۳}$$

بنابراین $f'_+(۲)$ و $f'_-(۲)$ وجود ندارند.

حالا از ضابطهٔ تابع مشتق می‌گیریم، سپس حد چپ و راست آن را در $x=۲$ به دست می‌آوریم:

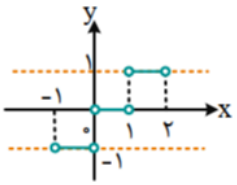
$$f'(x)=\begin{cases}\frac{۲x-۲}{۲\sqrt{x^۲-۲x}} & x>۲\\ \frac{-۴۸}{x^۴} & x<۲\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+} f'(x)=\frac{۴-۲}{۰^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f'(x)=\frac{-۴۸}{۱۶}=-۳\end{cases}$$

بنابراین گزینه ۴ جواب است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۳ **اولاً:** تابع f در نقاط با طول صحیح مشتق‌ناپذیر است، پس نمودار f' در نقاط با طول صحیح «تعریف نشده» خواهد بود. پس گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند، چون در $x=۰$ مقدار f' تعریف شده است. (نقطه توپر است.)

ثانیاً:



$$-۱<x<۰ \xrightarrow{[x]=-۱} f(x)=x(-۱)=-x \Rightarrow f'(x)=-۱$$

$$۰<x<۱ \xrightarrow{[x]=۰} f(x)=x(۰)=۰ \Rightarrow f'(x)=۰$$

$$۱<x<۲ \xrightarrow{[x]=۱} f(x)=x(۱)=x \Rightarrow f'(x)=۱$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۴ در نقطهٔ گوشه‌ای، تابع پیوسته است ولی مشتق چپ و راست، دو عدد مختلف است یا اینکه یکی متناهی و دیگری نامتناهی(بی‌نهایت) است.
(درسنامه صفحهٔ ۸۱ کتاب درسی)

اولاً: هر چهار تابع داده شده در $x=0$ پیوسته هستند. (گزینه‌های (۱)و (۲) به علت داشتن عامل صفرشونده پیوسته هستند.)
ثانیاً:

گزینه ۱ $f(x)=x[-x]$:

$$\begin{cases} x\to 0 : f(x)=x(0)=0 \Rightarrow f'(x)=0 \\ x\to 0^+ : f(x)=x(-1)=-x \Rightarrow f'(x)=-1 \end{cases} \xrightarrow{\neq} \text{گوشه‌ای}$$

گزینه ۲ $f(x)=|x|[x]$:

$$\begin{cases} x\to 0^- : f(x)=(-x)(-1) \Rightarrow f'(x)=1 \\ x\to 0^+ : f(x)=(x)(0)=0 \Rightarrow f'(x)=0 \end{cases} \xrightarrow{\neq} \text{گوشه‌ای}$$

گزینه ۳ $f(x)=\sqrt{x+|x|}$:

$$\begin{cases} x\to 0^- : f(x)=\sqrt{x-x}=0 \Rightarrow f'(x)=0 \\ x\to 0^+ : f(x)=\sqrt{2x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'_+(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{0^+}=+\infty \end{cases} \Rightarrow \text{گوشه‌ای}$$

گزینه ۴ $f(x)=\sqrt{x^2+|x|}$:

$$\begin{cases} x\to 0^- : f(x)=\sqrt{x^2-x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} \Rightarrow f'_-(0)=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty \\ x\to 0^+ : f(x)=\sqrt{x^2+x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \Rightarrow f'_+(0)=\dfrac{1}{0^+}=+\infty \end{cases}$$

پس در گزینه (۴) مشتق چپ و راست هر دو نامتناهی هستند، یعنی $x=0$ نقطه گوشه‌ای نیست.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۵

$$y_1=y_2 \Rightarrow \frac{3}{2}x+6=a\sqrt{x} \quad (*)$$

$$y'_1=y'_2 \Rightarrow \frac{3}{2}=\frac{a}{2\sqrt{x}} \Rightarrow 3\sqrt{x}=a \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{a}{3} \Rightarrow x=\frac{a^2}{9}$$

حالا در رابطهٔ (*) جایگذاری می‌کنیم: $\sqrt{x}=\frac{a}{3}$ یا $x=\frac{a^2}{9}$:

$$\frac{3}{2}x+6=a\sqrt{x} \Rightarrow \frac{3}{2}(\frac{a^2}{9})+6=a(\frac{a}{3}) \Rightarrow \frac{a^2}{6}+6=\frac{a^2}{3} \Rightarrow 6=\frac{a^2}{6} \Rightarrow a^2=36 \Rightarrow a=\pm 6$$

از آن‌جایی که طبق رابطهٔ $\sqrt{x}=\frac{a}{3}$، حاصل رادیکال نباید منفی باشد، پس $a=6$ قابل قبول است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

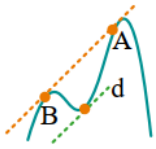
۱۸۶ ابتدا شیب خط مماس در نقطه A را می‌یابیم که همان $f'(۱)$ است:

$$f(x)=-x^۴+۲x^۲+x \Rightarrow f'(x)=-۴x^۳+۴x+۱ \xrightarrow{x=۱} f'(۱)=۱$$

بنابراین شیب خط مماس در نقطهٔ B هم برابر با ۱ است، یعنی در نقطهٔ B هم مقدار مشتق تابع برابر ۱ می‌شود:

$$f'(x)=۱ \Rightarrow -۴x^۳+۴x+۱=۱ \Rightarrow -۴x^۳+۴x=۰ \Rightarrow -۴x(x^۲-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=۰ \\ x=-۱ \end{cases}$$

طبق شکل مشخص است که طول نقطهٔ B همان $x=-۱$ است و $x=۰$ هم طول نقطه‌ای است بین آن‌ها که آن‌جا هم شیب خط مماس ۱ است و مماس‌موازی پاره‌خط AB است، مثلاً خط d:



$$f(x)=-x^۴+۲x^۲+x \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \Rightarrow y=۲ \Rightarrow A(۱,۲) \\ x=-۱ \Rightarrow y=۰ \Rightarrow B(-۱,۰) \end{cases} \xrightarrow{\text{فاصله}} AB=\sqrt{(-۱-۱)^۲+(۰-۲)^۲}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۷ ضابطهٔ f را می‌توان رادیکالی هم نوشت:

$$f(x)=۳(x+۱)^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۳}{\sqrt{x+۱}}$$

$$\text{آهنگ متوسط در بازهٔ } [۰,۳] = \frac{f(۳)-f(۰)}{۳-۰}=\frac{\frac{۳}{۲}-۳}{۳}=-\frac{۱}{۲}$$

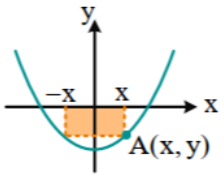
$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(x)=۳(-\frac{۱}{۲})(x+۱)^{-\frac{۳}{۲}}=\frac{-۳}{۲\sqrt{(x+۱)^۳}}$$

می‌خواهیم دو عبارت بالا، با هم برابر باشند:

$$\frac{-۳}{۲\sqrt{(x+۱)^۳}}=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \sqrt{(x+۱)^۳}=۳ \xrightarrow{\text{توان ۲}} (x+۱)^۳=۹ \xrightarrow{\sqrt[۳]{}} x+۱=\sqrt[۳]{۹} \Rightarrow x=\sqrt[۳]{۹}-۱$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۸ نقطهٔ A را (x,y) فرض می‌کنیم. داریم:



$$\text{مساحت مستطیل} = \text{طول} \times \text{عرض} \Rightarrow S(x)=۲x \times y$$

از آن‌جایی که نقطهٔ A روی سهمی $y=x^۲-۹$ قرار دارد، پس $y_A=x^۲-۹$:

$$S(x)=۲x(x^۲-۹)=۲x^۳-۱۸x$$

حالا آهنگ لحظه‌ای تغییر مساحت را در $x=۲$ می‌یابیم، یعنی $S'(۲)$:

$$S'(x)=۶x^۲-۱۸ \Rightarrow S'(۲)=۲۴-۱۸=۶$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۹ شیب خط مماس در هر نقطه یعنی $f'(x)$:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+7x-1\Rightarrow f'(x)=x^2+2x+7$$

حالا آهنگ تغییر شیب، یعنی آهنگ تغییر $f'(x)$، یعنی از $f'(x)$ مشتق بگیریم:

$$f''(x)=2x+2$$

می‌خواهیم آهنگ لحظه‌ای تغییر شیب صفر شود:

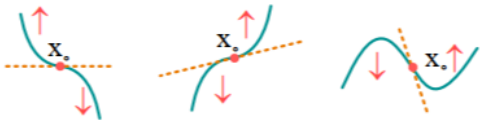
$$f''(x)=0\Rightarrow 2x+2=0\Rightarrow x=-1$$

در نهایت شیب خط مماس را در $x=-1$ می‌یابیم، یعنی $f'(-1)$:

$$f'(x)=x^2+2x+7\Rightarrow f'(-1)=1-2+7=6$$

تذکر: وایسا، نرو! آهنگ لحظه‌ای تغییر شیب یک تابع مشتق‌پذیر، در نقطهٔ عطف صفر می‌شود، مثل x_0 در شکل‌های زیر:

پس در واقع، شیب خط مماس در نقطهٔ عطف از ما خواسته شده است.



(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹۰ حدود داده شده را ساده می‌کنیم. با توجه به اینکه حد مخرج کسر برابر صفر است، واضح است که $f(2)=2$ می‌باشد.

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x}\times\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{1}{2}f'(2)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(ah+2)-2}{h(h-2)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h-2}\times\lim_{h\to 0}\frac{f(2+ah)-2}{h}=-\frac{1}{2}\times af'(2)$$

بنابراین:

$$-\frac{a}{2}f'(2)=\frac{1}{2}f'(2)\Rightarrow a=-1$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۱ معادلهٔ خط گذرا از دو نقطهٔ $(1,-2)$ و $(-1,4)$ را می‌نویسیم:

$$y-4=\frac{4-(-2)}{-1-1}(x+1)\Rightarrow y-4=-3(x+1)\Rightarrow y=-3x+1$$

$$f(0)=1$$

$$f'(0)=-3$$

این خط در $x=0$ بر $f(x)$ مماس است. بنابراین:

خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{f^2(x)+f(x)-2}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{(f(x)+2)(f(x)-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)-f(0)}\times\lim_{x\to 0}\frac{3}{f(x)+2}=\frac{1}{f'(0)}\times\frac{3}{1+2}=-\frac{1}{3}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۲ ابتدا در ضابطهٔ تابع f، $x=1$ قرار می‌دهیم:

$$x=1\Rightarrow f(1)=2\sqrt{1}+\sqrt[3]{1}-f(1)\times 1\to f(1)+f(1)=3\to f(1)=\frac{3}{2}$$

حالا از تابع f مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-\frac{3}{2}x\to f'(x)=2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{2}$$

$$f'(1)=2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}=1+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}=\frac{6+2-9}{6}=-\frac{1}{6}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۳ $x=۴$ مخرج تابع f را صفر می‌کند پس:

$$۴-b=۰\rightarrow b=۴$$

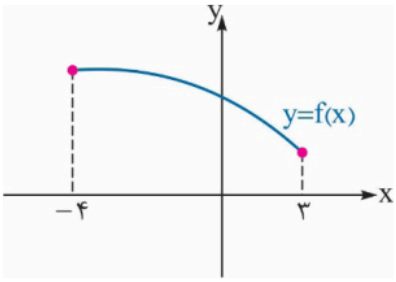
برد توابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $R-\left\{\frac{a}{c}\right\}$ است پس:

$$\frac{a}{۱}=۳\Rightarrow a=۳\rightarrow f(x)=\frac{۳x+۱}{x-۴}\rightarrow f'(x)=\frac{-۱۲-۱}{(x-۴)^۲}\rightarrow f'(x)=\frac{-۱۳}{(x-۴)^۲}$$

$$f'(۴+\sqrt{۱۳})=\frac{-۱۳}{(۴+\sqrt{۱۳}-۴)^۲}=\frac{-۱۳}{۱۳}=-۱$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۴ ابتدا نمودار $f(x-۲)$ را، ۲ واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار $y=f(x)$ ساخته شود. با توجه به اینکه f همواره اکیداً نزولی است



پس $f'<۰$ ، از طرفی f همواره بالای محور xهاست. $(f>۰)$ پس $f'-f<۰$

$$\frac{f'(x)-f(x)}{x^۲-۵x+۴}\geq ۰\xrightarrow{f'(x)-f(x)<۰} x^۲-۵x+۴<۰$$

$$(x-۱)(x-۴)<۰\rightarrow ۱<x<۴$$

از طرفی باید به دامنهٔ $f(x)$ هم توجه داشته باشیم، با توجه به نمودار $D_f=[-۴,۳]$ پس:

$$D_y=[-۴,۳]\cap(۱,۴)=(۱,۳]\xrightarrow{f'(۳)\text{ وجود ندارد}} D_y=(۱,۳)$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۵

$$f(x)=x^۳+x^۲-۲x+۱\rightarrow f(۱)=۱+۱-۲+۱=۱$$

$$f'(x)=۳x^۲+۲x-۲\rightarrow f'(۱)=۳+۲-۲=۳$$

$$(fof)'(۱)=f'(۱)\times f'\big(f(۱)\big)\xrightarrow[f(۱)=۱]{f'(۱)=۳} f'(۱)\times f'(۱)=۳\times ۳=۹$$

$$(fof')(۱)=f\big(f'(۱)\big)=f(۳)=۳^۳+۳^۲-۲(۳)+۱=۲۷+۹-۶+۱=۳۱$$

$$\rightarrow (fof)'(۱)+(fof')(۱)=۹+۳۱=۴۰$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۶ با توجه به اینکه خط d_1 با جهت مثبت محور xها زاویه ۱۳۵° می‌سازد پس شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ی $A(۱,۲)$ برابر $\tan ۱۳۵^\circ$ می‌باشد یعنی:

$$f'(۱)=\tan ۱۳۵^\circ=-۱$$

با توجه به موازی بودن خط d_1 و d_2 پس شیب خط مماس بر نمودار تابع g در نقطهٔ $B(۱,۳)$ هم ۱- می‌باشد یعنی :

$$g'(۱)=\tan ۱۳۵^\circ=-۱$$

از طرفی می‌دانیم $f(۱)=۲$ و $g(۱)=۳$ پس داریم:

$$y=\frac{g^۲(x)}{f(x)}\Rightarrow y'=\frac{۲g(x)g'(x)f(x)-f'(x)g^۲(x)}{(f(x))^۲}$$

$$y'(۱)=\frac{۲g(۱)\times g'(۱)\times f(۱)-f'(۱)\times g^۲(۱)}{(f(۱))^۲}=\frac{۲\times ۳\times(-۱)\times ۲-(-۱)(۳)^۲}{(۲)^۲}=\frac{-۱۲+۹}{۴}=-\frac{۳}{۴}$$

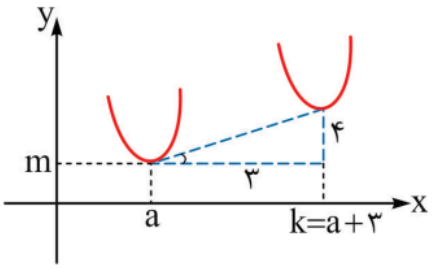
(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۷ ابتدا تابع g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=ax^۲+bx+c\xrightarrow[\text{به راست}]{\text{۳واحد}}y=a(x-۳)^۲+b(x-۳)+c\xrightarrow[\text{به بالا}]{\text{۴واحد}}g(x)=a(x-۳)^۲+b(x-۳)+c+۴$$

حالا برای پیدا کردن شیب خط مماس بر منحنی f و g از آن‌ها مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=۲ax+b\qquad g'(x)=۲a(x-۳)+b$$



با توجه به صورت سوال، خط d در نقطهٔ $x=a$ بر منحنی f مماس است. فرض می‌کنیم خط d در نقطهٔ $x=k$ هم بر منحنی g مماس باشد. پس:

$$f'(a)=g'(k)\Rightarrow ۲a^۲+\cancel{b}=۲a(k-۳)+\cancel{b}\Rightarrow a=k-۳\xrightarrow{a\neq ۰}k=a+۳$$

$$f'(a)=\frac{۴}{۳}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۸

$$f(x)=ax+b\to f\big(x(ax+b)\big)=x^۲-x-۱\qquad f\left(ax^۲+bx\right)=x^۲-x-۱$$

$$\to a\left(ax^۲+bx\right)+b=x^۲-x-۱\Rightarrow a^۲x^۲+abx+b=x^۲-x-۱$$

$$\to\begin{cases}a^۲=۱\\ab=-۱\to a=۱\to f(x)=ax+b\to f(x)=x-۱\to\begin{cases}f(۳)=۳-۱=۲\\ f'(x)=۱\to f'(۳)=۱\end{cases}\to f(۳)+f'(۳)=۳\\ b=-۱\end{cases}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۹ حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(-2+h)-g(-2)}{h}$ برابر $g'(-2)$ است. پس ابتدا از طرفین رابطهٔ $f\left(x^2g(2x)\right)=x^2-3x$ مشتق می‌گیریم:

$$f'\left(x^2g(2x)\right)\times\left(2xg(2x)+2x^2g'(2x)\right)=2x-3$$

حالا در این تساوی $x=-1$ قرار می‌دهیم تا $g'(-2)$ به دست آید. در ضمن با توجه به صورت سوال $f'(1)=5$ و $g(-2)=1$ است:

$$x=-1: f'\left(g(-2)\right)\times\left(-2g(-2)+2g'(-2)\right)=-5\Rightarrow \underbrace{f'(1)}_{5}\times\left(-2+2g'(-2)\right)=-5\Rightarrow -2+2g'(-2)=-1$$

$$\Rightarrow 2g'(-2)=1\Rightarrow g'(-2)=\frac{1}{2}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۰ تابع $g(x)$ درنقطهٔ $x=1$ پیوسته است. حالا حاصل حد را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{g(1+h)-g(1-h)}{h}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{h\to 0^+}\frac{g'(1+h)+g'(1-h)}{1}=g'_+(1)+g'_-(1)$$

حالا ضابطهٔ تابع g را در اطراف $x=1$ تعیین می‌کنیم و سپس از آن مشتق می‌گیریم:

$$(1)\ x>1:[x]=1\Rightarrow g(x)=|x-1|f(x)=(x-1)(x^2+x)\Rightarrow g(x)=x^3-x\Rightarrow g'(x)=3x^2-1\Rightarrow g'_+(1)=3-1=2$$

$$(2)\ x<1:[x]=0\Rightarrow g(x)=|0-1|f(x)=(1)(x^3-1)\Rightarrow g'(x)=3x^2\Rightarrow g'_-(1)=3$$

پس حاصل حد خواسته شده برابر است با:

$$g'_+(1)+g'_-(1)=2+3=5$$

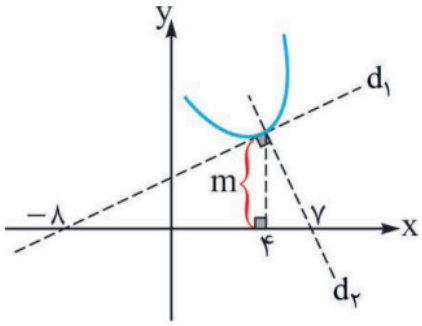
(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۱ در بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(4,+\infty)$ تابع اکیداً صعودی است پس علامت مشتق در این بازه مثبت است. ولی در بازه $(0,4)$ تابع اکیداً نزولی است و علامت مشتق در این بازه منفی است. با توجه به توضیحات بالا $f'(6)>0$ و $f'(3)<0$ پس حاصلضرب منفی است و گزینه ۳ درست است.

دقت کنید که در نقطه‌ی $x=0$ و $x=4$ شیب خط مماس بر نمودار صفر است پس $f'(4)\times f'(-1)=0$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۲



شیب خط d_1 $\frac{m}{12}\xrightarrow[m>0]{d_1\perp d_2}\frac{m}{12}\left(\frac{-m}{3}\right)=-1\to m^2=36\to m=6$

شیب خط d_2 $=\frac{-m}{3}$

با توجه به مقدار $m=6$ شیب خط d_1 که همان $f'(4)$ است برابر $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$ است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۳ ابتدا ضابطه‌ی تابع g' را می‌نویسیم و با توجه به آن محل برخورد دو تابع g' و f' در نتیجه ضابطه f' را به دست می‌آوریم.

$$g'(x)=-x+۴\rightarrow g'(۲)=-۲+۴=۲\rightarrow (۲,۲)\in f'$$

$$f'(x)=x\rightarrow f'(۲)=۲ \qquad (gof')(۲)=g\big(f'(۲)\big)=۶\rightarrow g(۲)=۶$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۴

$$\lim_{x\to(-۳)^-} f(x)=(-۳)^۳-(-۳)+۱=-۲۷+۳+۱=-۲۳$$

$$\lim_{x\to(-۳)^+} f(x)=a(-۳)^۲+b(-۳)+۱=۹a-۳b+۱$$

$$۹a-۳b+۱=-۲۳$$

$$\underline{۹a-۳b=-۲۴}$$

$$f'(x)=\begin{cases}۳x^۲-۱ & x<-۳\rightarrow f'_-(-۳)=۳(-۳)^۲-۱=۲۶\\ ۲ax+b & x>-۳\rightarrow f'_+(-۳)=۲a(-۳)+b=-۶a+b\end{cases}$$

$$\underline{-۶a+b=۲۶}$$

$$\begin{cases}۹a-۳b=-۲۴\\ -۶a+b=۲۶\end{cases}\quad\begin{cases}۹a-۳b=-۲۴\\ \underline{-۱۸a+۳b=۷۸}\\ -۹a=۵۴\end{cases}\qquad \underline{a=-۶}\rightarrow \underline{b=-۱۰}$$

$$f(۲)=-۶(۲)^۲-۱۰(۲)+۱=-۲۴-۲۰+۱=-۴۳\rightarrow \frac{-۴۳+۳}{-۱۰}=\underline{۴}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۵ ابتدا پیوستگی تابع را در نقاط صحیح بررسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}۴ & x=۲\\ ۱ & ۱\le x<۲\\ ۰ & ۰\le x<۱\\ ۰ & -۱<x<۰\\ ۱ & x=-۱\end{cases}$$

بنابراین تابع داده شده، تنها در نقطه صحیح صفر روی فاصلهٔ $[-۱,۲]$ پیوسته است و چون برای هر $x\in(-۱,۱)$، $f(x)=۰$ است، در نتیجه: $f'(۰)=۰$.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۶ دو خط موازی با هم دارای شیب یکسانی هستند بنابراین شیب (مشتق) تابع دو ضابطه‌ای $f(x)$ در نقطهٔ $x=-۱$ برابر با یک می‌باشد و برای این که تابعی مشتق‌پذیر باشد می‌بایست حتماً پیوسته باشد. بنابراین داریم:

$$f(x)=\begin{cases} x+۲ & x\le -۱ \\ ax^۲+bx-۲ & x>-۱ \end{cases}$$

$$f(-۱)=۱ \qquad \lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=۱ \qquad \lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=a(-۱)^۲+b(-۱)-۲$$

$$\Rightarrow a-b-۲=۱ \Rightarrow \boxed{a-b=۳} \quad (۱)$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۱ & x<-۱ \\ ۲ax+b & x>-۱ \end{cases} \qquad f'_-(-۱)=f'_+(-۱)$$

$$\Rightarrow ۱=۲a(-۱)+b \Rightarrow \boxed{-۲a+b=۱} \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} a=-۴\,,\, b=-۷ \Rightarrow a+b=-۱۱$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۷ طبق نمودار شیب خط مماس بر تابع $y=۲f(۲x+۱)$ در $x=۲$ برابر $\tan(۱۸۰-۶۰)=-\tan ۶۰=-\sqrt{۳}$ است، بنابراین:

$$y'=۲\times ۲f'(۲x+۱)=۴f'(۲x+۱) \xrightarrow{x=۲}$$

$$۴f'(۵)=-\sqrt{۳} \to f'(۵)=-\frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

حال مشتق $f(x^۲-۲x+۵)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$y=f(x^۲-۲x+۵) \to y'=(۲x-۲)f'(x^۲-۲x+۵)$$

$$x=۲ \to y'=(۴-۲)f'(۵)=۲f'(۵)=۲\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۸ با توجه به این که خط $y=-\frac{۱}{۴}x+\frac{۲۱}{۴}$ در نقطهٔ $x=۱$ بر نمودار تابع f عمود می‌باشد می‌توان دریافت:

$$f'(۱)=۴ \quad , \quad f(۱)=۵$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱}\frac{f^۲(x)-۲۵}{x^۲-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{f^۲(x)-f(۱)^۲}{(x-۱)(x+۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}\times\frac{f(x)+f(۱)}{x+۱}$$

$$=f'(۱)\times\frac{۲f(۱)}{۲}=f'(۱)\times f(۱)=۲۰$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۹ می‌دانیم که توابع قدرمطلقی در ریشه‌های ساده تابع داخل قدرمطلق، مشتق ندارند. پس داریم:

$$f(x)=\left|x(x^۲-a)(x-۱)(x-۲)\right| \Rightarrow \text{ریشه‌های ساده}=x=۰,x=۱,x=۲$$

با توجه به این که تابع f دارای سه ریشهٔ ساده می‌باشد بنابراین یکی از ریشه‌ها می‌بایست تکراری باشد تا فقط در ۲ نقطه مشتق نداشته باشد.

$$x=۰ \Rightarrow x^۲-a=۰ \Rightarrow ۰-a=۰ \Rightarrow a=۰ \quad \text{ق ق}$$

$$f(x)=\left|x(x^۲)(x-۱)(x-۲)\right|=\left|x^۳(x-۱)(x-۲)\right| \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=۲ \end{cases} \quad \text{نقاط مشتق‌ناپذیر}$$

$$x=۱ \Rightarrow x^۲-a=۰ \Rightarrow ۱-a=۰ \Rightarrow a=۱ \Rightarrow f(x)=\left|x(x^۲-۱)(x-۱)(x-۲)\right| \Rightarrow$$

$$f(x)=\left|x(x-۱)^۲(x+۱)(x-۲)\right| \Rightarrow x=۰,-۱,۲ \quad \text{نقاط مشتق‌ناپذیر}$$

$$x=۲ \Rightarrow x^۲-a=۰ \Rightarrow ۴-a=۰ \Rightarrow a=۴ \Rightarrow f(x)=\left|x(x^۲-۴)(x-۱)(x-۲)\right| \Rightarrow$$

$$f(x)=\left|x(x-۲)^۲(x+۲)(x-۱)\right| \Rightarrow x=۰,-۲,۱ \quad \text{نقاط مشتق‌ناپذیر}$$

بنابراین فقط به‌ازای $a=۰$ تابع f در ۲ نقطه مشتق نخواهد داشت.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۱۰ با توجه به این که $x=۲$ بر نمودار $f(x)$ مماس است پس $x=۲$ مماس قائم تابع است و ریشهٔ عبارت زیر رادیکال است.

$$۲b-۲(۲)=۰ \rightarrow b=۲$$

با توجه به این که $۳y-۷x+k=۰$ بر f مماس است پس در نقطه‌ای به طول $x_۰$:

$$f(x)=x-۱-۲\sqrt[۳]{۴-۲x} \rightarrow f'(x_۰)=\frac{۷}{۳}$$

$$f'(x)=۱+\frac{۴}{۳\sqrt[۳]{(۴-۲x)^۲}}=\frac{۷}{۳} \rightarrow \sqrt[۳]{(۴-۲x)^۲}=۱$$

$$\begin{cases} ۴-۲x=۱ \rightarrow x=\frac{۳}{۲} & f(\frac{۳}{۲})=-\frac{۳}{۲} \\ ۴-۲x=-۱ \rightarrow x=\frac{۵}{۲} & f(\frac{۵}{۲})=\frac{۷}{۲} \end{cases}$$

$$(\frac{۳}{۲},-\frac{۳}{۲}) \in \text{خط} \Rightarrow ۳(-\frac{۳}{۲})-۷(\frac{۳}{۲})+k=۰ \rightarrow k=۱۵$$

$$(\frac{۵}{۲},\frac{۷}{۲}) \in \text{خط} \Rightarrow ۳(\frac{۷}{۲})-۷(\frac{۵}{۲})+k=۰ \rightarrow k=۷$$

$$k_۱k_۲=۱۰۵$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۱۱ تابع $g(x)$ را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$g(x)=\sqrt{\left(f(x)f'(x)\right)'}$$

$$f(x)=\sqrt{x^{۳}+۴}\rightarrow f'(x)=\frac{۳x^{۲}}{۲\sqrt{x^{۳}+۴}}=\frac{\frac{۳}{۲}x^{۲}}{f(x)}$$

$$\Rightarrow f(x)f'(x)=\frac{۳}{۲}x^{۲}\rightarrow\left(f(x)f'(x)\right)'=۳x$$

$$\Rightarrow g(x)=\sqrt{۳x}\qquad g(۱۲)=۶$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۱۲ ابتدا وارون تابع $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x+۷}\rightarrow f^{-۱}(x)=x^{۲}-۷\quad;\quad x\geq ۰$$

$$y=\left(\frac{f^{-۱}}{f}\right)(x)=\frac{x^{۲}-۷}{\sqrt{x+۷}}$$

حال مشتق تابع را در $x=۲$ به‌دست می‌آوریم.

$$y'=\frac{۲x\sqrt{x+۷}-\frac{x^{۲}-۷}{۲\sqrt{x+۷}}}{(x+۷)}$$

$$x=۲\rightarrow y'(۲)=\frac{۴(۳)-\frac{-۳}{۲(۳)}}{۹}=\frac{۲۵}{۱۸}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۱۳

$$f\left(۳x+g(x)\right)=x+g(۲x)\xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}}\left(۳+g'(x)\right)f'\left(۳x+g(x)\right)=۱+۲g'(۲x)$$

$$\xrightarrow{x=۰}\left(۳+g'(۰)\right)f'\left(g(۰)\right)=۱+۲g'(۰)\Rightarrow ۶f'(۲)=۷\Rightarrow f'(۲)=\frac{۷}{۶}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۱۴ آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع fof در نقطهٔ $x=۱$ همان مشتق تابع fof در $x=۱$ است، پس ابتدا از تابع f مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\begin{cases} ۲x-۳ & ; \quad x\geq ۰ \\ x^۲-۲x-۳ & ; \quad x<۰ \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۲ & ; \quad x>۰ \\ ۲x-۲ & ; \quad x<۰ \end{cases}$$

حالا مشتق تابع fof را در نقطهٔ $x=۱$ پیدا می‌کنیم:

$$(fof)'(x)=f'(x)\times f'\big(f(x)\big) \xrightarrow{x=۱} f'(۱)\times f'\big(f(۱)\big)$$

$$=f'(۱)\times f'(-۱)=۲\times -۴=-۸$$

حالا آهنگ متوسط تغییر تابع f را در بازهٔ $[-۱,۵]$ پیدا می‌کنیم:

$$\frac{f(۵)-f(-۱)}{۵-(-۱)}=\frac{(۲\times ۵-۳)-(۱+۲-۳)}{۶}=\frac{۷}{۶}$$

پس حاصل ضرب مقادیر خواسته شده برابر است با:

$$-۸\times\frac{۷}{۶}=-\frac{۲۸}{۳}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۱۵

$$y=f(x)=\frac{۱+x+x^۲+x^۳+\ldots+x^۶}{x^۳} \rightarrow f(۱)=۷$$

$$x^۳y=۱+x+x^۲+x^۳+\ldots+x^۶ \xrightarrow{\text{مشتق}} ۳x^۲y+x^۳y'=۱+۲x+۳x^۲+\ldots+۶x^۵$$

$$\xrightarrow{x=۱} ۳y+y'=۱+۲+۳+\ldots+۶=۲۱ \rightarrow ۳(۷)+y'=۲۱ \rightarrow y'=f'(۱)=۰$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۱۶ ابتدا معادلهٔ خط d را می‌نویسیم.

$$\begin{cases} f'(۴)=\frac{۵}{۲}=m \xrightarrow{y=mx+h} y=\frac{۵}{۲}x+h \xrightarrow{(۴,۱۱)} ۱۱=\frac{۵}{۲}\times ۴+h \rightarrow h=۱ \\ (۴,۱۱) \end{cases}$$

حال مختصات نقاط A و B را به‌دست می‌آوریم.

$$y=\frac{۵}{۲}x+۱ \rightarrow \begin{cases} x=۲ \rightarrow y=\frac{۵}{۲}\times ۲+۱=۶ \rightarrow A(۲,۶) \\ x=۸ \rightarrow y=\frac{۵}{۲}\times ۸+۱=۲۱ \rightarrow B(۸,۲۱) \end{cases}$$

در نهایت طول پاره‌خط $\overline{AB}$ را حساب می‌کنیم.

$$\overline{AB}=\sqrt{(y_B-y_A)^۲+(x_B-x_A)^۲}=\sqrt{(۲۱-۶)^۲+(۸-۲)^۲}=\sqrt{۲۶۱}=۳\sqrt{۲۹}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۷ طبق تعریف مشتق $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ است، پس:

$$\begin{cases} f(۱)=۲ \Rightarrow (۱,۲) \\ f'(۱)=۳ \Rightarrow m=۳ \quad \text{شیب} \end{cases}$$

پس می‌توان معادلهٔ خط مماس را به‌صورت زیر نوشت:

$$y-f(۱)=f'(۱)(x-۱) \rightarrow y-۲=۳(x-۱) \Rightarrow y=۳x-۱ \xrightarrow{y=۰} x=\frac{۱}{۳}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۸ تابع فقط در یک نقطه مشتق ناپذیر است از طرفی $x=۴$ و $x=-۱$ ریشه‌های عبارت داخل قدر مطلق هستند پس یکی از این ریشه‌ها باید ریشهٔ $x-a$ هم‌باشد تا کل تابع صفر شده و مشتق‌پذیر باشد. پس $a=-۱$ یا $a=۴$ می‌باشد با توجه به اینکه $\sqrt{a}f'_-(b)$ تعریف شده است $a=۴$ مورد قبول است پس تابع در $x=۴$ مشتق‌پذیر است و در $x=b=-۱$ مشتق‌ناپذیر است.

$$\Rightarrow f(x)=(x-۴)|(x-۴)(x+۱)| \xrightarrow{x<-۱} f(x)=(x-۴)^۲(x+۱) \quad \sqrt{a}f'_-(b)=\sqrt{۴}f'_-(-۱)=۲f'_-(-۱)=۲(۲۵)=۵۰$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۹ با محاسبهٔ مشتق $g(x)$ داریم:

$$g'(x)=\frac{f'(x).x^۲-۲xf(x)}{x^۴}.f'\left(\frac{f(x)}{x^۲}\right)$$

از طرفی $f'(x)=\frac{-۱}{۲\sqrt{x+۳}}$ است و با جایگذاری $x=۱$ داریم:

$$g'(۱)=\frac{f'(۱).(۱)-۲f(۱)}{۱}.f'\left(\frac{f(۱)}{۱}\right)=\frac{-\frac{۱}{۴}-۲(۰)}{۱}.f'(۰) =-\frac{۱}{۴}\times-\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۸\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲۴}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۰ با توجه به آنکه $f(-۲)=f(۲)$ و $g(-۲)=g(۲)$ پس خواستهٔ مسأله را می‌توانیم به‌صورت $f'(۲)g(۲)+g'(۲)f(۲)$ بنویسیم که همان $(f.g)'$ در نقطهٔ $x_۰=۲$ است.

حالا در ابتدا $f.g$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f.g=(x^۲+۱)^۲-(\sqrt{x^۴+۲x^۲})^۲=x^۴+۲x^۲+۱-x^۴-۲x^۲=۱$$

پس $f.g$ تابعی ثابت است و در نقاط مشتق‌پذیرِ دامنهٔ آن، مشتق برابر صفر است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۱ نقاط گوشه‌ای تابع عبارتند از: $x=۰$ و $x=۲$ که در $x=۰$ معادلهٔ نیم‌مماس چپ و در $x=۲$ معادلهٔ نیم‌مماس راست را می‌یابیم.

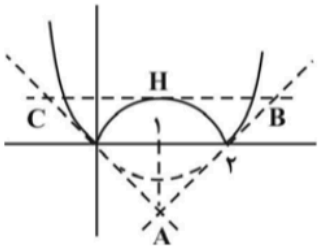
$$A\Big|_{۰}^{۰} \xrightarrow{\text{مشتق چپ}} y=|x^۲-۲x|=x^۲-۲x \to y'=۲x-۲ \xrightarrow{x=۰} m=-۲ \qquad x=۰ \text{ معادلهٔ نیم‌مماس چپ در } y=-۲x$$

$$B\Big|_{۰}^{۲} \xrightarrow{\text{مشتق راست}} y=|x(x-۲)|=x^۲-۲x \to y'=۲x-۲ \xrightarrow{x=۲} m=۲$$

$x=۲$ معادلهٔ نیم‌مماس راست در $y-۰=۲(x-۲) \to y=۲x-۴$ حال با هم قطع می‌دهیم تا مختصات نقطهٔ A بدست آید:

$$\begin{vmatrix} y=-۲x \\ y=۲x-۴ \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x=۱ \\ y=-۲ \end{vmatrix} \Rightarrow A\Big|_{-۲}^{۱}$$

چون نقطه $x=۱$ رأس این سهمی است لذا مماس در $x=۱$ خط افقی است. که $y=۱$ معادلهٔ آن است حال باید با نیم‌مماس‌ها قطع دهیم تا نقاط B و C تولید شود.



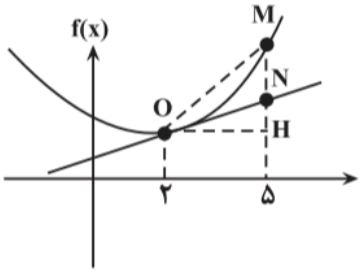
$$\begin{cases} y=-۲x \\ y=۱ \end{cases} \Rightarrow C\Big|_{۱}^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$\begin{cases} y=۲x-۴ \\ y=۱ \end{cases} \Rightarrow B\Big|_{۱}^{\frac{۵}{۲}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{قاعدهٔ مثلث}=BC=۳ \\ \text{ارتفاع مثلث}=AH=۳ \end{cases} \Rightarrow S=\frac{۳\times۳}{۲}=۴/۵$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۲



$$\text{آهنگ تغییر متوسط در } [۲,۵] = \text{شیب پاره‌خط } OM = \frac{MH}{OH} \xrightarrow{OH=۳}$$

$$\frac{MH}{۳}=۳\rightarrow MH=۹$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای در } x=۲ = \text{شیب پاره‌خط } ON = \frac{NH}{OH} \xrightarrow{OH=۳} \frac{NH}{۳}=۲\rightarrow NH=۶$$

$$MN=MH-NH=۹-۶=۳$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۳

ناحیه هاشورخورده از دو مثلث با مساحت برابر تشکیل شده است. قاعده این مثلث‌ها برابر $x=a$ و ارتفاع آن برابر $y=\frac{۲a}{a^۲+۱}$ است، لذا داریم:

$$s(x)=۲\times(\frac{x\times y}{۲})=۲\times(\frac{\frac{۲x^۲}{x^۲+۱}}{۲})=\frac{۲x^۲}{x^۲+۱}\Rightarrow S(x)=\frac{۲x^۲}{x^۲+۱}$$

بنابراین آهنگ لحظه‌ای تغییر مساحت دو مثلث برابر است با:

$$S'(x)=\frac{۴x(x^۲+۱)-۴x^۳}{(x^۲+۱)^۲}\Rightarrow S'(\frac{۱}{۲})=\frac{۲}{\frac{۲۵}{۱۶}}=\frac{۳۲}{۲۵}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۴

فرض می‌کنیم:

$$g(x)=\sqrt[۳]{f(x)}$$

آن‌گاه داریم:

$$\Rightarrow \lim_{x\to -۱}\frac{\sqrt[۳]{f(x)}-\sqrt[۳]{f(-۱)}}{x-(-۱)}=g'(x)$$

از طرفی طبق قاعده مشتق زنجیره‌ای داریم:

$$g'(x)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{\sqrt[۳]{f^۲(x)}}\times f'(x)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{\sqrt[۳]{(\frac{۴-x}{۲x+۷})^۲}}\times f'(x)$$

$$\xrightarrow{f'(x)=\frac{-۱۵}{(۲x+۷)^۲}} g'(x)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{\sqrt[۳]{(\frac{۴-x}{۲x+۷})^۲}}\times\frac{-۱۵}{(۲x+۷)^۲} \xrightarrow{x=-۱} g'(-۱)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{\sqrt[۳]{(\frac{۴+۱}{-۲+۷})^۲}}\times\frac{-۱۵}{(-۲+۷)^۲}$$

$$=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{\sqrt[۳]{۱}}\times\frac{-۱۵}{۲۵}=-\frac{۱}{۵}$$

روش دوم برای حل:

$$\lim_{x\to -۱}\frac{\sqrt[۳]{f(x)}-\sqrt[۳]{f(-۱)}}{x+۱}\times\frac{\sqrt[۳]{f(x)^۲}+\sqrt[۳]{f(x)\times f(-۱)}+\sqrt[۳]{f(-۱)^۲}}{\sqrt[۳]{f(x)^۲}+\sqrt[۳]{f(x)\times f(-۱)}+\sqrt[۳]{f(-۱)^۲}}=\frac{۱}{۳}\times f'(-۱)\xrightarrow{f'(x)=\frac{-۱۵}{(۲x+۷)^۲}}\frac{۱}{۳}\times\frac{-۱۵}{۲۵}=-\frac{۱}{۵}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۵

با توجه به‌صورت سؤال باید مقادیر مشتق راست و چپ تابع داده شده را در $x=۳$ محاسبه کنیم، ابتدا مقادیر جزء صحیح و علامت قدر مطلق را تعیین می‌کنیم:

$$f(x)=x^۲[x^۲]|x-۳|\xrightarrow{x=۳^+} f(x)=x^۲[۹^+](x-۳)=۹x^۲(x-۳)=۹x^۳-۲۷x^۲\Rightarrow f'(x)=۲۷x^۲-۵۴x$$

$$\Rightarrow f'_+(۳)=۲۷(۹)-۵۴(۳)=۲۴۳-۱۶۲=۸۱ \quad f(x)=x^۲[x^۲]|x-۳|\xrightarrow{x=۳^-} x^۲[۹^-]\times(-(x-۳))$$

$$=-۸x^۲(x-۳)=-۸x^۳+۲۴x^۲\Rightarrow f'(x)=-۲۴x^۲+۴۸x \quad \Rightarrow f'_-(۳)=-۲۴(۹)+۴۸(۳)=-۲۱۶+۱۴۴=-۷۲$$

$$\sqrt{f'_+(۳)+f'_-(۳)}=\sqrt{۸۱+(-۷۲)}=\sqrt{۹}=۳$$

در نتیجه:

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۶ با محاسبه مشتق $g(x)$ داریم:

$$g'(x)=\frac{f'(x).x^{۲}-۲xf(x)}{x^{۴}}.f'(\frac{f(x)}{x^{۲}})$$

از طرفی $f'(x)=\frac{-۱}{۲\sqrt{x+۳}}$ است پس با جایگذاری $x=۱$ داریم:

$$g'(۱)=\frac{f'(۱).(۱)-۲f(۱)}{۱}.f'(\frac{f(۱)}{۱})=\frac{-\frac{۱}{۴}-۲(۰)}{۱}.f'(۰)=\frac{-۱}{۴}\times\frac{-۱}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۸\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲۴}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۷ محورyها، محور تقارن سهمی $f(x)=۲x^{۲}-۳$ است. پس نقاط تماس را $A(\alpha,۲\alpha^{۲}-۳)$ و $B(-\alpha,۲\alpha^{۲}-۳)$ فرض می‌کنیم. چون مماس‌های رسم شده در این نقطه‌ها بر هم عمودند لذا:

$$f'(\alpha)\times f'(-\alpha)=-۱$$

$$f'(x)=۴x\Rightarrow f'(\alpha)=۴\alpha$$

$$f'(-\alpha)=-۴\alpha$$

$$f'(\alpha)\times f'(-\alpha)=-۱\Rightarrow -۱۶\alpha^{۲}=-۱\Rightarrow \alpha=+\frac{۱}{۴}\quad \alpha=+\frac{۱}{۴}\Rightarrow y=۲(\frac{۱}{۴})^{۲}-۳=\frac{۱}{۸}-۳=-\frac{۲۳}{۸}\quad \alpha=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow y=۲(-\frac{۱}{۴})^{۲}-۳=\frac{۱}{۸}-۳=-\frac{۲۳}{۸}$$

$$-\frac{۲۳}{۸}+(-\frac{۲۳}{۸})=-\frac{۲۳}{۴}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۸ ابتدا $f(g(۲))$ را حساب می‌کنیم.

$$f(\overbrace{g(۲)}^{۵})=f(۵)=۳$$

پس حد داده شده مبهم است. اگر در مخرج از ۲ فاکتور بگیریم داریم:

$$\frac{۱}{۲}\lim_{x\to ۲}\frac{g(f(g(x)))-g(۳)}{x-۲}=\frac{۱}{۲}g'(۲)\times f'(\overbrace{g(۲)}^{۵})\times g'(f(\overbrace{g(۲)}^{۵}))=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times f'(۵)\times g'(\underbrace{f(۵)}_{۳})=\frac{۱}{۴}\times ۴\times g'(۳)=g'(۳)=-۲$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۹ ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق نقاط مشتق‌ناپذیرند. داریم:

$$x^{۳}+mx^{۲}+(m+۳)x=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x^{۲}+mx+m+۳=۰\end{cases}$$

یکی از ریشه‌ها صفر است برای اینکه فقط در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد، داریم:

۱) برای عبارت درجه دوم، $\Delta\le ۰$ باشد:

$$m^{۲}-۴(m+۳)\le ۰\Rightarrow m^{۲}-۴m-۱۲\le ۰\Rightarrow -۲\le m\le ۶$$

(در حالتی که $\Delta<۰$ باشد، ریشه نداریم و در حالتی که $\Delta=۰$ باشد، ریشه مکرر خواهیم داشت که مشتق‌پذیر است)

۲) برای عبارت درجه دوم $\Delta>۰$ باشد و یکی از ریشه‌ها صفر باشد:

$$\xrightarrow{x=۰}۰+۰+m+۳=۰\Rightarrow m=-۳$$

مجموع مقادیر صحیح ممکن برای m برابر است با:

$$(-۳)+(-۲)+(-۱)+(۰)+۱+۲+۳+۴+۵+۶=۱۵$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۰ دوره تناوب $T=۴$ است؛ پس $f'_{\pm}(-۷)=f'_{\pm}(-۸+۱)=f'_{\pm}(۱)$ است.

بنابراین معادلات خطوط مماس بر منحنی را در نقطه با طول $x=۱$ پیدا می‌کنیم و ۸واحد به چپ انتقال می دهیم.

$$\begin{matrix}f(۱)=۱\\f'_{-}(۱)=۳\\f'_{+}(۱)=-\frac{۴}{۳}\end{matrix}\Rightarrow$$ معادلات نیم‌مماس‌ها در نقطه به طول $x=۱$ $\begin{cases}y=۳x-۲\\y=-\frac{۴}{۳}x+\frac{۷}{۳}\end{cases}\xrightarrow{x\Rightarrow x+۸}$ معادلات نیم‌مماس‌ها در نقطه به طول $x=-۷$ $\begin{cases}y=۳(x+۸)-۲\\-\frac{۴}{۳}(x+۸)+\frac{۷}{۳}\end{cases}$

$$\begin{cases}y=۳x+۲۲\\y=-\frac{۴}{۳}x-\frac{۲۵}{۳}\end{cases}\quad\begin{matrix}\Rightarrow \text{عرض از مبدا}=۲۲\\\Rightarrow \text{عرض از مبدا}=-\frac{۲۵}{۳}\end{matrix}\xrightarrow{\text{اختلاف}}۲۲+\frac{۲۵}{۳}=\frac{۹۱}{۳}\xrightarrow{\text{جزء صحیح}}۳۰$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۱ ابتدا شیب خط به معادلهٔ $\frac{y-1}{3}+\frac{2x+1}{4}=-1$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{y}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2x}{4}+\frac{1}{4}=-1\Rightarrow\frac{y}{3}+\frac{x}{2}=-\frac{11}{12}\Rightarrow\text{شیب}=-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=-\frac{3}{2}$$

از آنجا که خط مماس بر منحنی f در $x=k$ عمود بر خط بالا می‌باشد، پس شیب آن قرینه و معکوس شده و برابر $\frac{2}{3}$ خواهد بود، به عبارتی $f'(k)=\frac{2}{3}$ است و داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(k+4h)-f(k)}{3h}=(\frac{4-0}{3})f'(k)=\frac{4}{3}(\frac{2}{3})=\frac{8}{9}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۲ داخل قدرمطلق ریشه ساده ندارد پس دلتای آن نامثبت است

$$\Delta=b^2-4ac=m^2-2m+1-4m\le 0\Rightarrow m^2-6m+1\le 0\ \ 3-\sqrt{8}\le m\le 3+\sqrt{8}\xrightarrow[m\in\mathbb{N}]{}\max(m)=5$$

پس $f(x)=x^2-4x+5$ و حاصل حد برابر است با:

$$-f'(3)=-(2\times 3-4)=-2$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۳ درنتیجه خواهیم داشت:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f_+'(2)\left[\frac{-6}{2^+}\right]=\left[(-3)^+\right]=-3\xrightarrow{x\to 2^+}f(x)=-3\sqrt[5]{16x}$$

$$f'(x)=-3\times\frac{16}{5\sqrt[5]{(16x)^4}}\Rightarrow f_+'(2)=-3\times\frac{16}{5\sqrt[5]{(32)^4}}=-3\times\frac{16}{5\times 16}\Rightarrow f_+'(2)=\frac{-3}{5}=-0/6$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۴ ابتدا از تابع f مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{-4x}{5\sqrt[5]{(a-x^2)^3}}$$

با توجه به اینکه تابع در $x=6$ نیم‌مماس قائم دارد، $x=6$ باید ریشه مخرج باشد:

$$\xrightarrow{x=6}a-(6)^2=0\Rightarrow a=36$$

حال مقدار مشتق تابع در $x=2$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(2)=\frac{-4(2)}{5\sqrt[5]{(36-4)^3}}=\frac{-8}{5\times 8}=\frac{-1}{5}$$

از طرفی $f(2)=4$، با داشتن شیب خط مماس و یک نقطه از آن، معادله خط مماس‌را می‌نویسیم:

$$y-4=\frac{-1}{5}(x-2)\Rightarrow y=\frac{-1}{5}x+\frac{22}{5}\xrightarrow{x=0}y=\frac{22}{5}=4/4$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۵

$$f(x)=\frac{x}{1-\sqrt{x+1}}\times\frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}=\frac{x(1+\sqrt{x+1})}{1-x-1}=-1-\sqrt{x+1}\Rightarrow f(3)=-3\text{(I)}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{x+1}}\xrightarrow{x=3}f'(3)=\frac{-1}{4}\text{(II)}$$

$$f''(x)=\frac{1}{4\sqrt{(x+1)^3}}\xrightarrow{x=3}f''(3)=\frac{1}{32}\text{(III)}$$

$$(\frac{f(x)}{f'(x)})'=\frac{f'(x)f'(x)-f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\xrightarrow[(III)]{(I),(II)}(\frac{f(3)}{f'(3)})'=\frac{(-\frac{1}{4})(-\frac{1}{4})-(-3)(\frac{1}{32})}{(\frac{-1}{4})^2}=\frac{\frac{1}{16}+\frac{3}{32}}{\frac{1}{16}}=\frac{5}{2}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۶ $(fog)'(\frac{۱}{۳}) = ?$

$$f(g(x)) = \frac{۱}{\sqrt{(\frac{۲x-۱}{x+۳})^۲}} = \frac{۱}{|\frac{۲x-۱}{x+۳}|} = |\frac{x+۳}{۲x-۱}| \xrightarrow{x=\frac{۱}{۳}} f(g(x)) = \frac{-x-۳}{۲x-۱}$$

$$(fog)'(x) = g'(x).f'(g'(x)) \Rightarrow (f(g(x)))' = \frac{۷}{(۲x-۱)^۲} \xrightarrow{x=\frac{۱}{۳}} (fog)'(\frac{۱}{۳}) = \frac{۷}{(\frac{۲}{۳}-۱)^۲} = \frac{۷}{(-\frac{۱}{۳})^۲} = \frac{۷}{\frac{۱}{۹}} = ۶۳$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۷ $f'(x) = ۱ + \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۴) = \frac{۵}{۴}$ طبق فرض

$$= \frac{f(h)-f(۱)}{h-۱} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow \frac{h+\sqrt{h}-۲}{h-۱} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow ۴h+۴\sqrt{h}-۸ = ۵h-۵ \Rightarrow ۴\sqrt{h} = h+۳ \Rightarrow ۱۶h = h^۲+۶h+۹ \Rightarrow h^۲-۱۰h+۹ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} h=۹ & \text{ق} \\ h=۱ & \text{غ ق} \end{cases}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۸ **گام اول:** خط d در نقطهٔ $x=۳$ بر نمودار تابع f مماس است، یعنی شیب خط d و $f'(۳)$ با هم برابرند؛ از طرفی شیب خط d برابر $\tan ۴۵^\circ = ۱$ است، پس $f'(۳) = ۱$ است.

معادلهٔ خط d به صورت $d : y = x - ۱$ است، پس عرض نقطه‌ای با طول ۳ برابر ۲ است؛ در نتیجه $f(۳) = ۲$ است.

گام دوم: تا این‌جا متوجه شده‌ایم که $f(۳) = ۲$ و $f'(۳) = ۱$ است. حال داریم:

$$L = \lim_{x\to ۳} \frac{f^۲(x)-f^۲(۳)}{x^۲-۹} = \lim_{x\to ۳} \frac{(f(x)+f(۳))(f(x)-f(۳))}{(x+۳)(x-۳)} = \lim_{x\to ۳} \frac{f(x)+f(۳)}{x+۳} \times \lim_{x\to ۳} \frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}$$

این همان تعریف مشتق تابع f در $x=۳$ است.

$$\Rightarrow L = \frac{۲f(۳)}{۶} \times f'(۳) = \frac{۲\times ۲}{۶} \times ۱ = \frac{۲}{۳}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۳۹ $$f'(x) = (۲\sqrt{x}+۱)'(x^۴-۲x) + (۲\sqrt{x}+۱)(x^۴-۲x)' = (\frac{۱}{\sqrt{x}})(x^۴-۲x) + (۲\sqrt{x}+۱)(۴x^۳-۲)$$

$$\xrightarrow{x=۱} f'(۱) = (۱-۲) + (۲+۱)(۴-۲) = ۵$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۴۰ **گام اول:** تابع در ابتدا باید در $x = ۴$ پیوسته باشد؛ پس مقدار تابع را با حدهای چپ و راست آن در $x = ۴$ برابر قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x\to ۴^-} f(x) = \lim_{x\to ۴} ax^۲ = ۱۶a$$

$$f(۴) = ۴(۴) - ۶ = ۱۰$$

$$\lim_{x\to ۴^+} f(x) = \lim_{x\to ۴} (b\sqrt{x} + c) = ۲b + c$$

شرط پیوستگی آن است که این سه مقدار با هم برابر باشند:

$$۱۶a = ۱۰ = ۲b + c \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{۵}{۸} \\ ۲b + c = ۱۰ \quad (*) \end{cases}$$

گام دوم: حال مشتق تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \begin{cases} ۲ax & ; x < ۴ \\ \frac{b}{۲\sqrt{x}} & ; x > ۴ \end{cases} \xrightarrow{a=\frac{۵}{۸}} f'(x) = \begin{cases} \frac{۵}{۴}x & ; x < ۴ \\ \frac{b}{۲\sqrt{x}} & ; x > ۴ \end{cases}$$

گام سوم: و مشتق‌های چپ و راست تابع در $x = ۴$ را برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} f'_-(۴) = \frac{۵}{۴}(۴) = ۵ \\ f'_+(۴) = \frac{b}{۲\sqrt{۴}} = \frac{b}{۴} \end{cases} \xrightarrow{\text{برابری}} \frac{b}{۴} = ۵ \Rightarrow b = ۲۰$$

و از رابطهٔ $(*)$ مقدار c به دست می‌آید:

$$c = ۱۰ - ۲b = ۱۰ - ۴۰ = -۳۰$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۴۱ **گام اول:** ابتدا باید ببینیم حد خواسته‌شده چه ربطی به مشتق تابع f در $x = ۱$ دارد. چون $f(۱) = ۲$ است؛ پس داریم:

$$L = \lim_{h\to ۰^+} \frac{f(۱-h) - f(۱)}{h} = \lim_{(-h)\to ۰^-} \frac{f(۱+(-h)) - f(۱)}{-(-h)} = -\lim_{(-h)\to ۰^-} \frac{f(۱+(-h)) - f(۱)}{-h} = -f'_-(۱)$$

گام دوم: یعنی کافی است مشتق چپ تابع f را در $x = ۱$ را حساب کنیم. با توجه به خطی‌بودن تابع f در $x \geq ۱$ و $x \leq ۱$، کافی است شیب نیم‌خط چپ را حساب کنیم:

$$f'_-(۱) = \frac{۲ - ۰}{۱ - (-۲)} = \frac{۲}{۳}$$

و در نتیجه حاصل حد برابر $-\frac{۲}{۳}$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۴۲ **گام اول:** ابتدا ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x^{۲}(۴x+a)} \Rightarrow f(x)=|x|\sqrt{۴x+a}$$

گام دوم: می‌دانیم که در ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق نقطهٔ گوشه‌ای داریم، پس با توجه به ضابطهٔ f، $x=۰$ نقطهٔ گوشه است، شیب نیم‌مماس‌هاس چپ و راست با توجه به تعریف مشتق در این نقطه برابر می‌شوند با:

$$\text{شیب نیم‌مماس راست}: f'_{+}(۰)=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{\overset{+}{\uparrow}|x|\sqrt{۴x+a}-\overset{\circ}{\overbrace{f(۰)}}}{x-۰} \Rightarrow f'_{+}(۰)=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{x\sqrt{۴x+a}}{x}=\sqrt{a}$$

$$\text{شیب نیم‌مماس چپ}: f'_{-}(۰)=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{\overset{-}{\uparrow}|x|\sqrt{۴x+a}-\overset{\circ}{\overbrace{f(۰)}}}{x-۰} \Rightarrow f'_{-}(۰)=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{-x\sqrt{۴x+a}}{x}=-\sqrt{a}$$

گام سوم: به گفتهٔ سؤال، نیم‌مماس‌های چپ و راست بر هم عمودند، پس شیب آن‌ها قرینه و معکوس یکدیگر است؛ به عبارت دیگر حاصل‌ضربشان برابر -۱ می‌شود.

$$\sqrt{a}(-\sqrt{a})=-۱ \Rightarrow a=۱$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۴۳ **گام اول:** تابع $y=[x]$ در تمام نقاط بازهٔ $(۵,۳]$ غیر از $x=۴$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. هم‌چنین تابع $y=۲x+m\sqrt{x}+n$ در بازهٔ $[۰,+\infty)$ پیوسته و مشتق‌پذیر است.

گام دوم: پس برای این‌که تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، کافی است در $x=۴$ مشتق‌پذیر باشد.

طبق درس box، چون $y=[x]$ ناپیوسته است، $x=۴$ باید ریشهٔ مضاعف عبارت $۲x+m\sqrt{x}+n$ باشد.

گام سوم: با توجه به شکل عبارت نتیجه می‌گیریم که $۲x+m\sqrt{x}+n$ باید به صورت $۲(\sqrt{x}-۲)^{۲}$ باشد تا $x=۴$ ریشهٔ مضاعف آن باشد:

$$۲x+m\sqrt{x}+n=۲(x-۴\sqrt{x}+۴)=۲x-۸\sqrt{x}+۸$$

این یعنی $m=-۸$ و $n=۸$ و در نتیجه $۲m+۳n=۸$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۴۴ **گام اول:** ابتدا ضابطه‌های توابع fog و gof را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=۲^{۲x}, g(x)=\log_۲ x \Rightarrow \begin{cases}(fog)(x)=f(g(x))=۲^{۲\log_۲ x}=۲^{\log_۲ x^۲}=x^۲\\(gof)(x)=g(f(x))=\log_۲ ۲^{۲x}=۲x\end{cases}$$

دقت کنید که هر دو تابع به ازای $x=۰/۱$ تعریف شده‌اند؛ در نتیجه داریم:

$$(fog+gof)(x)=x^۲+۲x$$

این تابع را h می‌نامیم.

گام دوم: مشتق این تابع را حساب می‌کنیم:

$$h'(x)=۲x+۲ \Rightarrow h'(۰/۱)=۰/۲+۲=۲/۲$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۴۵ **گام اول:** حد خواسته‌شده بسیار شبیه تعریف مشتق است، پس ابتدا تعریف مشتق تابع f را در $x=۱$ می‌نویسیم:

$$f'(۱)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$$

$f(۱)$ که برابر -۱ است:

$$\Rightarrow f'(۱)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)+۱}{h}$$

و حد خواسته‌شده معکوس این مقدار است:

$$\Rightarrow L=\lim_{h\to ۰}\frac{h}{۱+f(۱+h)}=\frac{۱}{f'(۱)} \quad (*)$$

گام دوم: حالا وقت محاسبهٔ $f'(۱)$ است:

$$f(x)=(x^۴-۲x^۳+x^۲-x)^۳ \Rightarrow f'(x)=۳(x^۴-۲x^۳+x^۲-x)'(x^۴-۲x^۳+x^۲-x)^۲$$

$$=۳(۴x^۳-۶x^۲+۲x-۱)(x^۴-۲x^۳+x^۲-x)^۲$$

$$\Rightarrow f'(۱)=۳(-۱)(-۱)^۲=-۳ \xrightarrow{(*)} L=-\frac{۱}{۳}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۴۶ **گام اول:** توجه کنید که $(fog)'(-۱)=g'(-۱)\times f'(g(-۱))=g'(-۱)f'(۲)$. در نتیجه نیاز به مقدار $g'(-۱)$ و $f'(۲)$ داریم.

گام دوم: مقدار $g'(-۱)$ برابر است با:

$$g'(x)=\frac{۲x(x+۲)-(۱+x^۲)}{(x+۲)^۲} \Rightarrow g'(-۱)=-۴$$

گام سوم: رابطهٔ مفروض سؤال این را به ما می‌دهد که $f'(۲)=۱۲$ است؛ در نتیجه مقدار $(fog)'(-۱)$ برابر است با:

$$(fog)'(-۱)=g'(-۱)\times f'(۲)=-۴\times ۱۲=-۴۸$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۴۷ **گام اول:** ابتدا ضابطهٔ تابع f را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x^{۲}(۳+\frac{۲}{x})}=\sqrt{۳x^{۲}+۲x}$$

$$f'(x)=\frac{۶x+۲}{۲\sqrt{۳x^{۲}+۲x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{۳x+۱}{\sqrt{۳x^{۲}+۲x}}$$

سپس مشتق می‌گیریم:

گام دوم: با توجه به فرضیات مسئله داریم:

$$g(x)=\frac{f(x)-۴}{x^{۲}-۴}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۲} g(x)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-۴}{x^{۲}-۴}=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{(x+۲)(x-۲)}=\frac{۱}{۴}\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\frac{۱}{۴}f'(۲)$$

گام سوم: در نتیجه مقدار $\lim_{x\to ۲} g(x)$ برابر است با:

$$\lim_{x\to ۲} g(x)=\frac{۱}{۴}f'(۲)=\frac{۱}{۴}\times\frac{۷}{۴}=\frac{۷}{۱۶}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۴۸ **گام اول:** ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$x<۰ \Rightarrow x^{۲}>۰ \Rightarrow x^{۲}+۱>۱ \Rightarrow ۰<\frac{۱}{x^{۲}+۱}<۱ \Rightarrow [\frac{۱}{x^{۲}+۱}]=۰$$

$$۴x^{۳}-۴x^{۲}+x=x(۴x^{۲}-۴x+۱)=x(۲x-۱)^{۲}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}۰ & ;x<۰\\ \frac{|۲x-۱|\sqrt{x}}{(x-۳)(x+۳)} & ;x\geq ۰\end{cases}$$

دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}-\{۳\}$ است.

گام دوم: $x=\frac{۱}{۲}$ ریشهٔ داخل عبارت قدرمطلق است؛ پس تابع در این نقطه مشتق‌ناپذیر است.

گام سوم: $x=۰$ ریشهٔ سادهٔ عبارت رادیکالی است، پس طبق نکات طول نقطهٔ بازگشتی تابع است. در نهایت تابع در ۲ نقطه از دامنه‌اش مشتق‌ناپذیر است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۴۹ **گام اول:** در یک همسایگی راست $x=\sqrt{۳}$ خواهیم داشت:

$$x>\sqrt{۳} \Rightarrow \sqrt{۳}x>۳ \Rightarrow f(x)=\frac{[\sqrt{۳}x]}{x}=\frac{۳}{x}$$

این تابع را h می‌نامیم:

$$h(x)=\frac{۳}{x}$$

گام دوم: حالا اگر مشتق تابع goh را در $x=\sqrt{۳}$ به دست آوریم، مشتق راست تابع gof را در این نقطه حساب کرده‌ایم:

$$(goh)'(x)=h'(x).g'(h(x)) \quad (*)$$

گام سوم: طبق رابطهٔ $(*)$ داریم:

$$\begin{cases} h(\sqrt{۳})=\frac{۳}{\sqrt{۳}}=\sqrt{۳} \\ h'(x)=-\frac{۳}{x^{۲}} \Rightarrow h'(\sqrt{۳})=-\frac{۳}{۳}=-۱ \\ g(x)=\frac{(۱)\sqrt[۳]{۵+x^{۲}}-x(\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(۵+x^{۲})^{۲}}})}{(\sqrt[۳]{۵+x^{۲}})^{۲}} \Rightarrow g'(\sqrt{۳})=\frac{۲-\frac{۱}{۲}}{۴}=\frac{۳}{۸} \end{cases}$$

$$(gof)'_{+}(\sqrt{۳})=(goh)'(\sqrt{۳})=(-۱)(\frac{۳}{۸})=-\frac{۳}{۸}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۵۰ **گام اول:** شیب خط d برابر $\tan ۴۵^{\circ}=۱$ است، پس معادلهٔ آن را $d: y=x+b$ در نظر می‌گیریم. این خط در $x=x_A$ بر نمودار تابع f مماس است، پس در $x=x_A$ مشتق تابع f برابر ۱ است.

گام دوم: مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\sqrt{x+۱}+x\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}} \Rightarrow f'(x)=\frac{۲(x+۱)+x}{۲\sqrt{x+۱}}=\frac{۳x+۲}{۲\sqrt{x+۱}}$$

گام سوم: مشتق را برابر ۱ قرار می‌دهیم:

$$\frac{۳x+۲}{۲\sqrt{x+۱}}=۱ \Rightarrow ۳x+۲=۲\sqrt{x+۱} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۹x^{۲}+۱۲x+۴=۴x+۴$$

$$\Rightarrow ۹x^{۲}+۸x=x(۹x+۸)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \ \checkmark \\ x=-\frac{۸}{۹} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

طول نقطهٔ A برابر صفر است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۵۱ **گام اول:** طول نقطهٔ تماس در معادلهٔ تلاقی نمودار و خط صدق می‌کند:

$$\frac{bx+1}{x+2}=ax+3 \xrightarrow{x=-1} \frac{-b+1}{1}=-a+3 \Rightarrow a=b+2 \quad (*)$$

گام دوم: طول نقطهٔ تماس در معادلهٔ تلاقی مشتق‌ها نیز صدق می‌کند:

$$f'(x)=\frac{2b-1}{(x+2)^2} \Rightarrow f'(-1)=a \Rightarrow 2b-1=a \xrightarrow{(*)} b=3, a=5 \Rightarrow a+b=8$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۵۲ **گام اول:** چون f درجه‌دوم است، فرم کلی آن را به صورت $f(x)=ax^2+bx+c$ در نظر می‌گیریم و $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x)=2ax+b$$

گام دوم: حال با توجه به این‌که $(f'of)(x)=f'(f(x))$، $f(x)=ax^2+bx+c$ را در آن جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\underbrace{(f'of)(x)}_{f'(f(x))}=8x^2-12x-3 \Rightarrow 2a(ax^2+bx+c)+b=8x^2-12x-3$$

گام سوم: حال جملات مشابه در تساوی دوم را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$\underline{2a^2x^2}+\underline{\underline{2abx}}+\underline{\underline{2ac+b}}=\underline{8x^2}\underline{\underline{-12x}}\underline{\underline{-3}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a^2=8 \Rightarrow a=\pm 2 & (\text{چون } f''(x)=2a \text{ و طبق صورت سؤال } f''(x)<0 \text{؛ پس } a=-2 \text{ قابل قبول است.}) \\ 2ab=-12 \xrightarrow{a=-2} 2(-2)b=-12 \Rightarrow b=3 & \\ 2ac+b=-3 \xrightarrow[b=3]{a=-2} -4c+3=-3 \Rightarrow 4c=6 \Rightarrow c=\frac{3}{2} & \end{cases}$$

پس $f(x)=-2x^2+3x+\frac{3}{2}$ و $f'(x)=-4x+3$.

گام چهارم: حال که ضابطهٔ f و f' را داریم، $(fof')(2)$ برابر می‌شود با:

$$(fof')(2)=f(f'(2)) \xrightarrow{f'(2)=-4(2)+3=-5} fof'(2)=f(-5)=-2(-5)^2+3(-5)+\frac{3}{2}$$

$$=-50-15+\frac{3}{2} \Rightarrow (fof')(2)=-63/5$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۵۳ **گام اول:** ضابطهٔ $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=(۴\sqrt{x})'+(۳g^{۳}(x))' \Rightarrow f'(x)=\frac{۴^{۲}}{۱\!\!۲\sqrt{x}}+۳(۳)g^{۲}(x)g'(x)$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{۲}{\sqrt{x}}+۹g^{۲}(x)g'(x)$$

گام دوم: حال $x=۱$ را در $f'(x)$ جای‌گذاری می‌کنیم و با توجه به این‌که $f'(۱)=g(۱)=۲$ خواهیم داشت:

$$f'(x)=\frac{۲}{\sqrt{x}}+۹g^{۲}(x)g'(x) \xrightarrow{x=۱} f'(۱)=\frac{۲}{\sqrt{۱}}+۹g^{۲}(۱)g'(۱)$$

$$\xrightarrow[g(۱)=۲]{f'(۱)=۲} ۲=۲+۹(۲)^{۲}g'(۱) \Rightarrow ۳۶g'(۱)=۰ \Rightarrow g'(۱)=۰$$

گام سوم: $f''(۱)$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\underbrace{\frac{۲}{\sqrt{x}}}_{p(x)}+\underbrace{۹g^{۲}(x)g'(x)}_{q(x)} \qquad p'(x)=\frac{-۲}{۲\sqrt{x}\,x} \Rightarrow p'(۱)=-۱$$

$g'(۱):q'(۱)=۹g^{۲}(۱)g''(۱)=۹(۴)g''(۱) \Rightarrow q'(۱)=۳۶g''(۱)$ در $q(x)$ عامل صفرشونده است.

پس $f''(۱)$ برابر می‌شود با:

$$f''(۱)=p'(۱)+q'(۱) \Rightarrow f''(۱)=-۱+۳۶g''(۱) \Rightarrow f''(۱)+۱=۳۶g''(۱)$$

گام چهارم: پس خواستهٔ سؤال برابر می‌شود با:

$$f''(۱)+۱=۳۶\,g''(۱) \Rightarrow \frac{۱+f''(۱)}{g''(۱)}=۳۶$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۵۴ **گام اول:** ابتدا معادلهٔ خط d را می‌نویسیم:

$$\left.\begin{matrix}(۰,-۱)\in d\\(۲,۰)\in d\end{matrix}\right\} \Rightarrow d: y-۰=\frac{۰-(-۱)}{۲-۰}(x-۲) \Rightarrow y=\frac{۱}{۲}(x-۲)$$

گام دوم: حال اگر طول نقاط A و H را x در نظر بگیریم، داریم:

$$\left.\begin{matrix}PH=x_H-x_P=x-۲\\AH=y_A-y_H=\frac{۱}{۲}(x-۲)\end{matrix}\right\} \Rightarrow S_{APH}=\frac{۱}{۴}(x-۲)^{۲}$$

گام سوم: آهنگ متوسط تغییرات مساحت را حساب می‌کنیم:

$$\overline{S}=\frac{\frac{۱}{۴}(۴/۱-۲)^{۲}-\frac{۱}{۴}(۳/۱-۲)^{۲}}{۴/۱-۳/۱}=\frac{۱}{۴}(۲/۱^{۲}-۱/۱^{۲})=\frac{۱}{۴}(۴/۴۱-۱/۲۱)=\frac{۳/۲}{۴}=۰/۸$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۵۵ **گام اول:** مشتق تابع f را با استفاده از نکتهٔ بیان‌شده محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = ۴(۲x^۵ - ۱)^۳ \times ۱۰x^۴ = ۴۰x^۴(۲x^۵ - ۱)^۳$$

گام دوم: حال مقادیر $f'(-۱)$ و $f'(۱)$ را مشخص می‌کنیم:

$$f'(-۱) = ۴۰\times(-۲۷)\ ,\ f'(۱) = ۴۰\times ۱$$

$$\Rightarrow \frac{f'(-۱)}{f'(۱)} = \frac{۴۰\times(-۲۷)}{۴۰\times ۱} = -۲۷$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۵۶ **گام اول:** با توجه به رابطهٔ مشتق تابع مرکب داریم:

$$((f+g)of)'(۱) = f'(۱)\big(f'(f(۱)) + g'(f(۱))\big)\ (*)$$

گام دوم: حال با کمک ضابطهٔ تابع f داریم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{۲-x} \Rightarrow f(۱) = ۱$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۲-x) + \sqrt{x}}{(۲-x)^۲} \Rightarrow f'(۱) = \frac{۳}{۲}$$

گام سوم: در نتیجه خواستهٔ مسئله برابر است با:

$$\xrightarrow{(*)} ((fog)of)'(۱) = f'(۱)(f'(۱) + g'(۱)) = \frac{۳}{۲}(\frac{۳}{۲} + ۲) = \frac{۲۱}{۴}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۵۷ **گام اول:** ابتدا ضابطهٔ مشتق اول و دوم تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = ax^{\frac{۱}{۲}} + ۲x^{-۲} \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{۲}x^{\frac{-۱}{۲}} - ۴x^{-۳} \Rightarrow f''(x) = \frac{-a}{۴}x^{\frac{-۳}{۲}} + ۱۲x^{-۴}$$

گام دوم: حال با توجه به رابطهٔ داده‌شده در مسئله داریم:

$$f''(۱) - f'(۱) = ۱۰ \Rightarrow (\frac{-a}{۴} + ۱۲) - (\frac{a}{۲} - ۴) = ۱۰$$

$$\Rightarrow \frac{-۳a}{۴} + ۱۶ = ۱۰ \Rightarrow \frac{۳a}{۴} = ۶ \Rightarrow a = ۸$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۵۸ **گام اول:** ابتدا آهنگ تغییر متوسط تابع f را در بازهٔ $[۰,۵]$ به دست می‌آوریم:

$$\text{آهنگ تغییر متوسط تابع } f \text{ در بازهٔ } [۰,۵] = \frac{f(۵)-f(۰)}{۵-۰} = \frac{۴m+۲۰-m}{۵} = \frac{۳m+۲۰}{۵}$$

گام دوم: برای مشخص‌کردن آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در $x=۱$، باید مقدار $f'(۱)$ را مشخص کنیم. در نتیجه داریم:

$$f'(x) = \sqrt{۳x+۱} + \frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۱}}(m+x) \Rightarrow f'(۱) = ۲ + \frac{۳}{۴}(m+۱) = \frac{۳}{۴}m + \frac{۱۱}{۴}$$

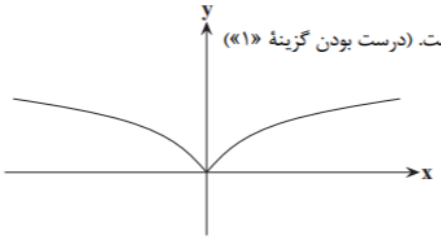
گام سوم: به کمک فرض مسئله داریم:

$$\frac{۳m+۲۰}{۵} = ۲(\frac{۳}{۴}m + \frac{۱۱}{۴}) - ۶$$

$$\xrightarrow{\times ۱۰} ۶m + ۴۰ = ۱۵m + ۵۵ - ۶۰ \Rightarrow ۹m = ۴۵ \Rightarrow m = ۵$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۵۹ از نمودار مشخص است که شیب خطوط مماس بر نمودار در سمت راست محور yها مثبت و در سمت چپ محور yها منفی است. (درست بودن گزینهٔ «۱»)



این نمودار نسبت به محور y متقارن است، پس $f'(-a) = -f'(a)$ (درست بودن گزینهٔ «۲»)

از شکل نمودار مشخص است که برای xهای مثبت، با افزایش x شیب خط مماس و درنتیجه مشتق کاهش می‌یابد. هم‌چنین برای xهای منفی، با افزایش x شیب خط مماس و درنتیجه مشتق منفی‌تر می‌شود (نادرست بودن گزینهٔ «۳»).

برای بررسی درست بودن گزینهٔ «۴» داریم:

$$f'(۲) < f'(۱) \Rightarrow -f'(۱) + f'(۲) < ۰ \Rightarrow f'(-۱) + f'(۲) < ۰$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۰ برای نوشتن معادلهٔ خط مماس نیاز به مختصات نقطهٔ تماس و شیب خط مماس داریم.

طول نقطه در صورت سؤال داده شده و عرض آن هم $f(۲) = ۰$ است. برای تعیین شیب از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم.

$$f'(۲) = \lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = \lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)\sqrt{x^۲+۵}-۰}{x-۲} = \sqrt{۲^۲+۵} = \sqrt{۹} = ۳ \Rightarrow m = ۳$$

حال معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم:

$$\left.\begin{matrix} A(۲,۰) \\ m = ۳ \end{matrix}\right\} \Rightarrow y - y_۱ = m(x - x_۱) \Rightarrow y - ۰ = ۳(x-۲) \Rightarrow y = ۳x - ۶ \xrightarrow{\text{عرض از مبدأ}} y = -۶$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۱

$$f'(۱) = \lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} \Rightarrow f'(۱) = \lim_{x\to ۱}\frac{\frac{(x^۳-۱)(|x^۲-۳x+۱|)}{\sqrt{x}}-۰}{x-۱} \Rightarrow f'(۱) = \lim_{x\to ۱}\frac{(x^۲+x+۱)(|x^۲-۳x+۱|)}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۱) = \frac{(۳)(۱)}{۱} = ۳$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۲ $x \to ۱^+ \Rightarrow f(x) = (ax^۲ + x) \times ۳(x-۱) = ۳ax^۳ + ۳x^۲ - ۳ax^۲ - ۳x \Rightarrow f'(x) = ۹ax^۲ + ۶x - ۶ax - ۳ \Rightarrow f'_+(۱) = ۹a + ۶ - ۶a - ۳$

$\Rightarrow f'_+(۱) = ۳a + ۳ = m_۱ \quad x \to ۱^- \Rightarrow f(x) = (ax^۲ + x)۲(-x + ۱) = -۲ax^۳ - ۲x^۲ + ۲ax^۲ + ۲x$

$\Rightarrow f'(x) = -۶ax^۲ - ۴x + ۴ax + ۲ \Rightarrow f'_-(۱) = -۶a - ۴ + ۴a + ۲ \Rightarrow f'_-(۱) = -۲a - ۲ = m_۲$

چون نیم مماس‌ها عمود بر هم هستند پس حاصل ضرب شیب‌ها ۱- است:

$(۳a + ۳)(-۲a - ۲) = -۱ \quad ۶(a+۱)^۲ = ۱ \Rightarrow (a+۱)^۲ = \frac{۱}{۶} \Rightarrow a + ۱ = \pm\frac{\sqrt{۶}}{۶} \Rightarrow a = -۱ \pm \frac{\sqrt{۶}}{۶}$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۳ نقطهٔ $A(x,y)$ بر روی منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{x+۸}$ قرار دارد.

فاصلهٔ A تا مبدأ مختصات: $B = \sqrt{(x_A - ۰)^۲ + (y_A - ۰)^۲} = \sqrt{x^۲ + (\sqrt{x+۸})^۲} = \sqrt{x^۲ + x + ۸} \Rightarrow B' = \frac{۲x+۱}{۲\sqrt{x^۲ + x + ۸}}$

$\Rightarrow B'(۷) = \frac{۲(۷)+۱}{۲\sqrt{۷^۲ + ۷ + ۸}} = \frac{۱۵}{۱۶}$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۴ معادله سهمی را به‌صورت $f(x) = a(x+۱)(x-۳)$ می‌نویسیم. چون $f(۱) = ۴$ است پس $a = -۱$ و در نتیجه $f(x) = -(x+۱)(x-۳)$ و یا $f(x) = -(x-۱)^۲ + ۴$ است.

$$g(x) = f\left(۱ - \frac{۲}{x}\right) = -\left(۱ - \frac{۲}{x} - ۱\right)^۲ + ۴ = ۴ - \frac{۴}{x^۲}$$

$$g'(x) = \frac{۸}{x^۳} \Rightarrow g''(x) = \frac{-۲۴}{x^۴} \Rightarrow g''(۲) = \frac{-۲۴}{۱۶} = \frac{-۳}{۲}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۵ ابتدا $f'(x)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f'(x) = \frac{\frac{۱۲}{x^۲}}{۳\sqrt[۳]{\left(۱۱ - \frac{۱۲}{x}\right)^۲}} \Rightarrow \begin{cases} f'(۱) = ۴ \\ f'(۴) = \frac{۱}{۱۶} \end{cases}$$

حال مشتق تابع خواسته شده را پیدا می‌کنیم:

$$y' = -f'(۲-x)f(۳+x) + f'(۳+x)f(۲-x)$$

$$y'(۱) = -f'(۱)f(۴) + f'(۴)f(۱) = -۴ \times ۲ + \frac{۱}{۱۶} \times (-۱) = -۸ - \frac{۱}{۱۶} = -\frac{۱۲۹}{۱۶}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۶

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+2}{x^2-1}=\frac{3}{2}\Rightarrow\begin{cases}f(1)=-2\\ \frac{f'(1)}{2}=\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow f'(1)=3$$

زیرا

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+2}{(x-1)(x+1)}=\frac{3}{2}\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x+1}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{f'(1)}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow f'(1)=3$$

از طرفی

$$(gof)'(1)=4\Rightarrow f'(1)g'(f(1))=4$$

$$\xrightarrow{-2}$$

$$\Rightarrow f'(1)g'(-2)=4\Rightarrow g'(-2)=\frac{4}{3}$$

$$y=g\left(\frac{2}{x}\right)\Rightarrow y'=\frac{-2}{x^2}g'\left(\frac{2}{x}\right)\Rightarrow y'(-1)=-2g'(-2)$$

$$y'(-1)=-2\times\frac{4}{3}=-\frac{8}{3}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۷ خطوط مماس در نقاطی با طول $x=\pm 1$ برهم عمودند؛ پس:

$$f'(1)f'(-1)=-1$$

$$f'(x)=4ax^2-4x\begin{cases}f'(1)\begin{cases}=4a-4\\ =4(a-1)\end{cases}\\ f'(-1)\begin{cases}=-4a+4\\ =-4(a-1)\end{cases}\end{cases}$$

$$f'(1).f'(-1)=-16(a-1)(a-1)=-1$$

$$(a-1)^2=\frac{1}{16}\begin{cases}a-1=\frac{1}{4} & a=\frac{5}{4}\\ a-1=-\frac{1}{4} & a=\frac{3}{4}\end{cases}$$

$$a_1+a_2=\frac{8}{4}=2$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۸

$$f(x)=xg(x)+4x+1\xrightarrow{\text{مشتق می گیریم}}\Rightarrow$$

$$f'(x)=gx+xg'(x)+4\xrightarrow{x=0}\Rightarrow$$

$$f'(0)=g(0)+4$$

$$f'(x)=3+\frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+1}}\Rightarrow f'(0)=3+\frac{4}{2}=5$$

$$5=g(0)+4\Rightarrow g(0)=1$$

چون g پیوسته است پس:

$$\lim_{x\to 0}g(x)=g(0)=1$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۹ ابتدا f' را بدست می‌آوریم.

$$f'(x)=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}(\alpha-۲x)-۲\sqrt[۳]{x^{۲}}=\frac{۲\alpha-۴x-۶x}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

$$f'(x)=\frac{۲\alpha-۱۰x}{۳\sqrt[۳]{x}}=۰\Rightarrow x=\frac{\alpha}{۵}$$

f' را تعیین علامت می‌کنیم.

x	۰		$\frac{\alpha}{۵}$	
f'	−	+	۰	−
f	↘	↗		↘

قرار است فقط در بازه $(۰,۱)$ صعودی اکید باشد پس $\frac{\alpha}{۵}=۱$ یعنی $\alpha=۵$ پس ضابطه‌ی آن به صورت مقابل است. $f(x)=\sqrt[۳]{x^{۲}}(۵-۲x)$

$$f(۸)=۴x-۱۱=-۴۴$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۷۰

$\bullet: p(x)=(x-۱)q(x)+۵\Rightarrow p(۱)=۵$

ابتدا الگوریتم تقسیم را می‌نویسیم و داریم:

$$\Rightarrow ۱+a+۴-۱+۲=۵\Rightarrow a=-۱$$

$$p(x)=x^{۸}-x^{۶}+۴x^{۳}-x+۲$$

از طرفین تساوی $\bullet$ مشتقات متوالی می‌گیریم.

$$p'(x)=q(x)+(x-۱)q'(x)$$

$$p''(x)=q'(x)+q'(x)+q''(x).(x-۱)$$

$$\Rightarrow p''(۱)=۲q'(۱)$$

پس باقی‌مانده q' بر $x-۱$ برابر ۲۵ است.

$$p'(x)=۸x^{۷}-۶x^{۵}+۱۲x^{۲}-۱\Rightarrow p''(x)=۵۶x^{۶}-۳۰x^{۴}+۲۴x$$

$$\Rightarrow p''(۱)=۵۰\Rightarrow q'(۱)=۲۵$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۷۱

$x=۰\Rightarrow f(۰)=\frac{۱}{۴}, f'(۰)=۲\rightarrow\frac{۴m-۰}{۱۶}=۲\rightarrow m=۸$

$۶۴-۴y(۴y-۱)=۰\Rightarrow ۴y^{۲}-y-۱۶=۰$

$y=\frac{۸x+۱}{x^{۲}+۴}\Rightarrow x^{۲}y+۴y-۸x-۱=۰$

$y=\frac{۱\pm\sqrt{۱+۲۵۶}}{۸}\Rightarrow[\frac{\sqrt{۲۵۷}+۱}{۸}]=۲\quad[\frac{\sqrt{۲۵۷}-۱}{۸}]=۰$

$x^{۲}y-۸x+۴y-۱=۰, \Delta=۰$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۷۲

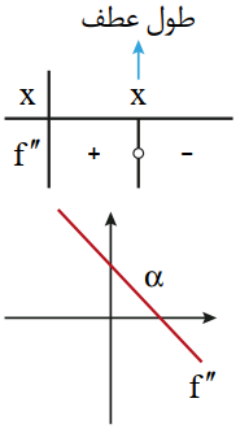
$$y=\frac{\pi}{\sqrt{۲x+۱}}\rightarrow y'=\pi(-\frac{۱}{۲})(۲)(۲x+۱)^{-\frac{۳}{۲}}=\frac{-\pi}{(۲x+۱)\sqrt{۲x+۱}}$$

$\rightarrow y'(۴)=\frac{-\pi}{۲۷}$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۷۳ تابع درجه سوم است پس مشتق آن یک خط است و البته طول نقطه عطف تابع ریشه $f''(x)=0$ پس $f''(\alpha)=0$

$\alpha>0$ و جدول مقابل را داریم:



پس f'' یک خط است که در $\alpha>0$ برابر صفر شده است و نمودار آن به صورت مقابل است.

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۷۴ مقدار $f'(0)$ را با استفاده از تعریف مشتق به‌دست می‌آوریم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x(3[x]+1/5)^2\times 2^x-0}{x}=\lim_{x\to 0}(3[x]+1/5)^2\times 2^x$$

برای محاسبهٔ حد به‌دست آمده، باید حد راست و چپ را جداگانه محاسبه کنیم. توجه کنید در همسایگی راست عدد صفر، داریم $[x]=0$ و در همسایگی چپ عدد صفر، داریم $[x]=-1$، پس:

$$\lim_{x\to 0^+}(3[x]+1/5)^2\times 2^x=(3\times 0+1/5)^2\times 2^0=2/25$$

$$\lim_{x\to 0^-}(3[x]+1/5)^2\times 2^x=(3\times(-1)+1/5)^2\times 2^0=(-1/5)^2\times 1=2/25$$

بنابراین:

$$f'(0)=2/25$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۷۵ خط $y=2x+3$ در نقطه‌ای به‌طول $x=2$ بر نمودار تابع f مماس است؛ بنابراین:

$$y=2x+3 \xrightarrow{x=2} y=7 \Rightarrow f(2)=7$$

$$y=2x+3 \Rightarrow \text{شیب خط مماس}=2 \Rightarrow f'(2)=2$$

اکنون حاصل حد خواسته‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(2x)-7}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(2x)-7}{(2x+1)(x-1)}$$

با تغییر متغیر $2x=t$، داریم:

$$2x=t \Rightarrow x=\frac{t}{2},\ x\to 1 \Rightarrow t\to 2$$

$$\lim_{t\to 2}\frac{f(t)-7}{(t+1)(\frac{t}{2}-1)}=\lim_{t\to 2}\frac{f(t)-f(2)}{\frac{1}{2}(t-2)}\times\lim_{t\to 2}\frac{1}{t+1}=2\lim_{t\to 2}\frac{f(t)-f(2)}{t-2}\times\frac{1}{3}=2f'(2)\times\frac{1}{3}=2\times 2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۷۶ مقدار هر دو مشتق خواسته‌شده را با استفاده از تعریف مشتق به‌دست می‌آوریم:

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x^۲-۴)(۲^x-۴)-۰}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}(x+۲)(۲^x-۴)=۴\times(۴-۴)=۰$$

$$f'(-۲)=\lim_{x\to -۲}\frac{f(x)-f(-۲)}{x+۲}=\lim_{x\to -۲}\frac{(x^۲-۴)(۲^x-۴)-۰}{x+۲}=\lim_{x\to -۲}(x-۲)(۲^x-۴)=-۴\times(\frac{۱}{۴}-۴)=-۱+۱۶=۱۵$$

بنابراین مقدار $f'(۲)+f'(-۲)$، برابر $۱۵=۱۵+۰$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۷۷ حد داده‌شده را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم و داریم:

$$\lim_{x\to +\infty}x(f(\frac{x+۴}{x})-۴)=\lim_{x\to +\infty}x(f(۱+\frac{۴}{x})-۴)\overset{f(۱)=۴}{=\!=}\lim_{x\to +\infty}x(f(۱+\frac{۴}{x})-f(۱))$$

اکنون با استفاده از تغییر متغیر $\frac{۴}{x}=h$ داریم:

$$x\to +\infty\Rightarrow\frac{۴}{x}\to ۰\Rightarrow h\to ۰\quad;\quad\frac{۴}{x}=h\Rightarrow x=\frac{۴}{h}$$

بنابراین حد داده‌شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم و با کمک تعریف مشتق در $x=۱$، یعنی $f'(۱)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ داریم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{۴}{h}(f(۱+h)-f(۱))=۴\times\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=۴f'(۱)=۱۶$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۷۸ ابتدا با توجه به قاعدهٔ مشتق ضرب دو تابع داریم:

$$f'(۹)g(۹)+g'(۹)f(۹)=(f\cdot g)'(۹)$$

پس ابتدا حاصل $f\cdot g$ را به کمک اتحاد مزدوج به‌دست می‌آوریم:

$$(f\cdot g)(x)=\sqrt{x+\sqrt{x^۲-۴x}}\times\sqrt{x-\sqrt{x^۲-۴x}}=\sqrt{(x+\sqrt{x^۲-۴x})(x-\sqrt{x^۲-۴x})}=\sqrt{x^۲-x^۲+۴x}=\sqrt{۴x}$$

اکنون مشتق تابع $f\cdot g$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(f\cdot g)'=(\sqrt{۴x})'=\frac{۴}{۲\sqrt{۴x}}=\frac{۱}{\sqrt{x}}\Rightarrow(f\cdot g)'(۹)=\frac{۱}{\sqrt{۹}}=\frac{۱}{۳}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۷۹ ابتدا مختصات نقطهٔ M را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=۲\sqrt{۱۲-۸x} \xrightarrow{x=۱} f(۱)=۲\sqrt{۱۲-۸}=۴ \Rightarrow M(۱,۴)$$ نقطهٔ تماس

شیب خط d با مقدار $f'(۱)$، یعنی مشتق f در نقطهٔ تماس، برابر است. بنابراین $f'(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۲\times\frac{-۸}{۲\sqrt{۱۲-۸x}}=\frac{-۸}{\sqrt{۱۲-۸x}} \Rightarrow f'(۱)=\frac{-۸}{۲}=-۴ \Rightarrow m_d=-۴$$

حال معادلهٔ خط d را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} m_d=-۴ \\ M(۱,۴) \end{cases} \Rightarrow y-۴=-۴(x-۱) \Rightarrow y=-۴x+۸$$

با محاسبهٔ مختصات نقاط A و B، مساحت مثلث AOB را به‌دست می‌آوریم:

$$y=-۴x+۸ \Rightarrow \begin{cases} x_B=۰ \Rightarrow y_B=۸ \\ y_A=۰ \Rightarrow x_A=۲ \end{cases} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AOB}}=\frac{۱}{۲}\times۸\times۲=۸$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۰ تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر است، پس تابع f در $x=a$ پیوسته است و $f'_-(a)=f'_+(a)$.

حال داریم:

$$f(x)=\begin{cases} bx-c & x<a \\ \frac{۲}{x} & x\geq a \end{cases}$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a) \Rightarrow ba-c=\frac{۲}{a} \Rightarrow ba^۲-ac=۲ \quad (*)$$

اکنون $f'(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\begin{cases} b & x<a \Rightarrow f'_-(a)=b \\ -\frac{۲}{x^۲} & x\geq a \Rightarrow f'_+(a)=-\frac{۲}{a^۲} \end{cases} \Rightarrow b=-\frac{۲}{a^۲} \Rightarrow ba^۲=-۲$$

حال داریم:

$$ba^۲=-۲ \xrightarrow{(*)} -۲-ac=۲ \Rightarrow ac=-۴$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۱ با توجه به این‌که $x=-۱$ و $x=۳$ صفرهای سهمی داده‌شده هستند، معادلهٔ سهمی را می‌نویسیم:

$$f(x)=a(x+۱)(x-۳) \xrightarrow{f(۰)=۶} ۶=a(۰+۱)(۰-۳) \Rightarrow a=-۲$$

$$\Rightarrow f(x)=-۲(x+۱)(x-۳)=-۲x^۲+۴x+۶$$

اکنون $f(۲x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(۲x)=-۲(۲x)^۲+۴(۲x)+۶=-۸x^۲+۸x+۶$$

حال ضابطهٔ تابع g را می‌نویسیم:

$$g(x)=\frac{f(۲x)-۶}{f(x)+۲x^۲}=\frac{-۸x^۲+۸x+۶-۶}{-۲x^۲+۴x+۶+۲x^۲}=\frac{-۸x^۲+۸x}{۴x+۶}=\frac{-۴x^۲+۴x}{۲x+۳}$$

اکنون $g'(x)$ و سپس $g'(-۱)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$g'(x)=\frac{(-۸x+۴)(۲x+۳)-۲(-۴x^۲+۴x)}{(۲x+۳)^۲} \Rightarrow g'(-۱)=\frac{(۱۲)(۱)-۲(-۸)}{(۱)^۲} \Rightarrow g'(-۱)=۲۸$$

بنابراین شیب خط مماس بر نمودار تابع g در $x=-۱$، برابر ۲۸ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۲ تابع f در $x=۲$ پیوستگی راست دارد و در $x=۴$ پیوسته است.

می‌خواهیم مشتق راست تابع f در $x=۲$ را محاسبه کنیم. ابتدا توجه کنید ضابطهٔ تابع f در همسایگی راست عدد ۲ به‌صورت $f(x)=x\times ۲\times(-(x-۴))$ یعنی $f(x)=-۲x^۲+۸x$ است، پس:

$$f'(x)=-۴x+۸ \Rightarrow f'_+(۲)=-۸+۸ \Rightarrow f'_+(۲)=۰$$

بنابراین شیب نیم‌مماس راست تابع f در $x=۲$ برابر صفر بوده و با توجه به این‌که این تابع از نقطهٔ $(۲,۸)$ می‌گذرد، پس معادلهٔ خط نیم‌مماس راست به‌صورت $y=۸$ است.

همچنین می‌خواهیم مشتق چپ تابع f در $x=۴$ را محاسبه کنیم. توجه کنید ضابطهٔ تابع f در همسایگی چپ عدد ۴ به‌صورت زیر است:

$$f(x)=x\left[۴^-\right](-(x-۴))=۳x(-x+۴)=-۳x^۲+۱۲x$$

حال داریم:

$$f'(x)=-۶x+۱۲ \Rightarrow f'_-(۴)=-۶\times ۴+۱۲ \Rightarrow f'_-(۴)=-۱۲$$

بنابراین شیب نیم‌مماس چپ تابع f در $x=۴$ برابر -۱۲ بوده و با توجه به این‌که این تابع از نقطهٔ $(۴,۰)$ می‌گذرد، معادلهٔ نیم‌مماس چپ به‌صورت زیر است:

$$y-۰=-۱۲(x-۴) \Rightarrow y=-۱۲x+۴۸$$

اکنون طول محل تلاقی این دو خط را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y=۸ \\ y=-۱۲x+۴۸ \end{cases} \Rightarrow ۸=-۱۲x+۴۸ \Rightarrow ۱۲x=۴۰ \Rightarrow x=\frac{۴۰}{۱۲} \Rightarrow x=\frac{۱۰}{۳}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۳ با کمی دقت متوجه می‌شویم که خواستهٔ مسئله، همان $(gof)'(\sqrt{۵})$ است، زیرا:

$$g'(f(x))\cdot f'(x)=(g(f(x)))'=(gof)'(x)$$

چون $(gof)'(\sqrt{۵})$ را می‌خواهیم، ابتدا ضابطهٔ f و g را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{۱}{\sqrt[۵]{۸x+۴|x|}} \xrightarrow[x>۰]{\sqrt{۵}>۰} f(x)=\frac{۱}{\sqrt[۵]{۸x+۴x}}=\frac{۱}{\sqrt[۵]{۱۲x}}$$

$$g(x)=\frac{۱}{x^۵+|x|^۵} \xrightarrow[x>۰]{\sqrt{۵}>۰} g(x)=\frac{۱}{x^۵+x^۵}=\frac{۱}{۲x^۵}$$

حال ضابطهٔ gof را به‌دست می‌آوریم:

$$gof(x)=g(\frac{۱}{\sqrt[۵]{۱۲x}})=\frac{۱}{۲(\frac{۱}{\sqrt[۵]{۱۲x}})^۵}=۶x \Rightarrow (gof)'(x)=۶ \Rightarrow (gof)'(\sqrt{۵})=۶$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۴ برای این‌که $x=۲$ طول نقطهٔ گوشه‌ای باشد، تابع f باید در $x=۲$ پیوسته باشد. از طرفی $y=[۲x]$ در $x=۲$ ناپیوسته است، پس $x=۲$ ریشهٔ عبارت $|x^۲-۳x+a|$ است؛ بنابراین:

$$x^۲-۳x+a=۰ \xrightarrow{x=۲} ۴-۶+a=۰ \Rightarrow a=۲ \Rightarrow f(x)=|x^۲-۳x+۲|[۲x]=|(x-۲)(x-۱)|[۲x]$$

اکنون ضابطهٔ f را در همسایگی چپ و راست $x=۲$ بازنویسی می‌کنیم:

$$x<۲ \Rightarrow f(x)=-(x^۲-۳x+۲)(۳) \Rightarrow f'(x)=-۶x+۹ \Rightarrow f'_-(۲)=-۳$$

$$x>۲ \Rightarrow f(x)=(x^۲-۳x+۲)(۴) \Rightarrow f'(x)=۸x-۱۲ \Rightarrow f'_+(۲)=۴$$

پس خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$\frac{f'_+(۲)}{f'_-(۲)}=-\frac{۴}{۳}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۵ دو تابع $f(x)=x^۲\sqrt{x}$ و $g(x)=x^۳+ax^۲+b$ در $x=۱$ مشتق‌پذیرند و در $x=۱$ برهم مماس‌اند. بنابراین:

$$f(۱)=g(۱),\ f'(۱)=g'(۱)$$

حال داریم:

$$f(۱)=g(۱) \Rightarrow ۱=۱+a+b \Rightarrow a+b=۰ \quad (*)$$

از طرفی:

$$\begin{cases} f'(x)=(۲x)(\sqrt{x})+(\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(x^۲) \Rightarrow f'(۱)=۲+\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲} \\ g'(x)=۳x^۲+۲ax \Rightarrow g'(۱)=۳+۲a \end{cases} \Rightarrow ۳+۲a=\frac{۵}{۲} \Rightarrow a=-\frac{۱}{۴} \xrightarrow{(*)} b=\frac{۱}{۴}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۶ ابتدا آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[۰,۱]$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{f(۱)-f(۰)}{۱-۰}=\frac{(۱-۲(۲))-(۰-۲)}{۱}=۱-۴+۲=-۱$$

برای یافتن آهنگ تغییر لحظه‌ای، $f'(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۱-\frac{۶}{۲\sqrt{۳x+۱}}=۱-\frac{۳}{\sqrt{۳x+۱}}$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=\alpha$، نصف آهنگ متوسط در بازهٔ $[۰,۱]$ است، پس:

$$۳\alpha+۱=۴ \Rightarrow \alpha=۱ \Rightarrow f(\alpha)=f(۱)=۱-۴=-۳$$

$$f'(\alpha)=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۱-\frac{۳}{\sqrt{۳\alpha+۱}}=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۳}{۲}=\frac{۳}{\sqrt{۳\alpha+۱}}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۷ از طرفین رابطه با کمک قاعدهٔ زنجیری، مشتق می‌گیریم:

$$۳x^{۲}g'(x^{۳})=(۱+\frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲}+۳}})f'(x+\sqrt{x^{۲}+۳})$$

حال داریم:

$$\xrightarrow{x=۱} ۳g'(۱)=(۱+\frac{۱}{۲})f'(۳) \Rightarrow ۳g'(۱)=\frac{۳}{۲}f'(۳) \Rightarrow \frac{f'(۳)}{g'(۱)}=۲$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۸ با استفاده از قاعدهٔ زنجیری، مشتق تابع g را محاسبه می‌کنیم:

$$g(x)=f(\sqrt[۳]{x})-۷ \Rightarrow g'(x)=f'(\sqrt[۳]{x})\times\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}-۰ \Rightarrow \frac{۱}{x}=f'(\sqrt[۳]{x})\times\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}} \Rightarrow f'(\sqrt[۳]{x})=\frac{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}{x} \Rightarrow f'(\sqrt[۳]{x})=\frac{۳}{\sqrt[۳]{x}} \quad (*)$$

برای یافتن $f'(۶)$، باید $\sqrt[۳]{x}$ را برابر ۶ قرار دهیم:

$$(*) \xrightarrow{\sqrt[۳]{x}=۶} f'(۶)=\frac{۳}{۶} \Rightarrow f'(۶)=\frac{۱}{۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۹ ابتدا مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y=x^{۳}+۶x^{۲}+۵x+۱۱ \Rightarrow y'=۳x^{۲}+۱۲x+۵$$

کمترین مقدار تابع درجه دوم $y'=۳x^{۲}+۱۲x+۵$، برابر عرض رأس این سهمی است. طول رأس سهمی از رابطهٔ $x=-\frac{b}{۲a}$ به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{-۱۲}{۲\times۳}=-\frac{۱۲}{۶}=-۲$$

بنابراین عرض رأس سهمی برابر است با:

$$۳(-۲)^{۲}+۱۲(-۲)+۵=۱۲-۲۴+۵=-۱۲+۵=-۷$$

پس کمترین مقدار شیب خطوط مماس بر تابع برابر -۷ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۹۰ تابع $f(x)=|۲x-۴|\sqrt{ax}$ در $x=۲$ پیوسته است. اکنون ضابطهٔ تابع f را در همسایگی چپ و راست $x=۲$ بازنویسی می‌کنیم:

$$x<۲ \Rightarrow f(x)=-(۲x-۴)\sqrt{ax} \Rightarrow f'(x)=-۲\sqrt{ax}-\frac{a}{۲\sqrt{ax}}(۲x-۴) \Rightarrow f'_{-}(۲)=-۲\sqrt{۲a}$$

$$x>۲ \Rightarrow f(x)=(۲x-۴)\sqrt{ax} \Rightarrow f'(x)=۲\sqrt{ax}+\frac{a}{۲\sqrt{ax}}(۲x-۴) \Rightarrow f'_{+}(۲)=۲\sqrt{۲a}$$

اکنون داریم:

$$۲\sqrt{۲a}+۲\sqrt{۲a}=۸ \Rightarrow \sqrt{۲a}=۲ \Rightarrow ۲a=۴ \Rightarrow a=۲$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۹۱ ابتدا نقطهٔ تلاقی تابع f با نیمساز ناحیهٔ اول را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{۲x}{\sqrt{۳x+۱}} \\ y=x \end{cases} \Rightarrow \frac{۲x}{\sqrt{۳x+۱}}=x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \text{ غ‌ق‌ق} \text{ (طول نقطهٔ برخورد تابع f با نیمساز ناحیهٔ اول عددی مثبت است.)} \\ \frac{۲}{\sqrt{۳x+۱}}=۱ \Rightarrow \sqrt{۳x+۱}=۲ \Rightarrow ۳x+۱=۴ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow f(۱)=۱ \end{cases}$$

پس نقطهٔ $A(۱,۱)$، نقطهٔ تماس است.

اکنون $f'(x)$ و سپس $f'(۱)$ که همان شیب خط مماس بر تابع f است را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{۲(\sqrt{۳x+۱})-\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۱}}(۲x)}{(\sqrt{۳x+۱})^{۲}} \Rightarrow f'(۱)=\frac{۲(۲)-\frac{۳}{۴}(۲)}{۴} \Rightarrow f'(۱)=\frac{۵}{۸} \Rightarrow \text{شیب خط مماس}=m=\frac{۵}{۸}$$

حال معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم:

$$y-y_{۰}=m(x-x_{۰}) \xrightarrow[m=\frac{۵}{۸}]{A(۱,۱)} y-۱=\frac{۵}{۸}(x-۱) \Rightarrow y=\frac{۵}{۸}x+\frac{۳}{۸}$$

پس عرض از مبدأ خط مماس برابر $\frac{۳}{۸}$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۹۲ ابتدا مشتق f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x^{۲}\sqrt{x+۳}-۱ \Rightarrow f'(x)=۲x(\sqrt{x+۳})+\frac{۱}{۲\sqrt{x+۳}}(x^{۲})$$

حال از تابع $y=(f-g)of$، مشتق می‌گیریم:

$$y=((f-g)of)(x) \Rightarrow y'=f'(x)\cdot(f-g)'(f(x))$$

بنابراین:

$$x=۱ \Rightarrow y'(۱)=f'(۱)\cdot(f-g)'(f(۱)) \quad (*)$$

از طرفی:

$$f(۱)=(۱)^{۲}\sqrt{۱+۳}-۱=۱ \ , \ f'(۱)=(۲)(\sqrt{۱+۳})+\frac{۱}{۲\sqrt{۱+۳}}(۱)^{۲}=۴+\frac{۱}{۴}=\frac{۱۷}{۴}$$

پس داریم:

$$(*) \Rightarrow y'(۱)=\frac{۱۷}{۴}\times(f-g)'(۱)=\frac{۱۷}{۴}\times(f'(۱)-g'(۱))$$

طبق فرض سؤال $g'(۱)=-۲$؛ بنابراین:

$$y'(۱)=\frac{۱۷}{۴}(\frac{۱۷}{۴}+۲)=\frac{۱۷}{۴}(\frac{۲۵}{۴})=\frac{۴۲۵}{۱۶}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۹۳ ابتدا ضابطهٔ f را بدون قدرمطلق می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x<-۲ \Rightarrow |۴+۲x|=-(۴+۲x) \\ x\geq -۲ \Rightarrow |۴+۲x|=۴+۲x \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} -(۴+۲x)\sqrt[۳]{ax} & x\leq -۲ \\ (۴+۲x)\sqrt[۳]{ax} & x\geq -۲ \end{cases}$$

تابع f در $x=-۲$ پیوسته است ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نیست، پس $x=-۲$ نقطهٔ گوشه‌ای است. با توجه به ضابطه‌های تابع f، مشخص است که مشتق راست و چپ در $x=-۲$ قرینهٔ یکدیگرند، پس داریم:

$$y=(۴+۲x)\sqrt[۳]{ax} \Rightarrow y'=۲\sqrt[۳]{ax}+\frac{a}{۳\sqrt[۳]{(ax)^{۲}}}(۴+۲x) \Rightarrow f'_{+}(-۲)=۲\sqrt[۳]{-۲a}=-۲\sqrt[۳]{۲a} \Rightarrow f'_{-}(-۲)=۲\sqrt[۳]{۲a}$$

حال داریم:

$$|۲\sqrt[۳]{۲a}+۲\sqrt[۳]{۲a}|=۸ \Rightarrow |\sqrt[۳]{۲a}|=۲ \Rightarrow \sqrt[۳]{۲a}=\pm ۲ \Rightarrow \begin{cases} ۲a=۸ \Rightarrow a=۴ \\ ۲a=-۸ \Rightarrow a=-۴ \end{cases}$$

پس مقدار مثبت a برابر ۴ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۹۴ ابتدا آهنگ متوسط را در بازهٔ $[۰,۱]$ به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x\sqrt{۳x+۱} \Rightarrow \begin{cases} f(۱)=۲ \\ f(۰)=۰ \end{cases}$$

$$\text{آهنگ تغییر متوسط } f \text{ در بازهٔ } [۰,۱] = \frac{f(۱)-f(۰)}{۱-۰}=\frac{۲-۰}{۱}=۲$$

اکنون f' را به‌دست می‌آوریم و سپس $f'(۱)$ یعنی آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=۱$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=(۱)\sqrt{۳x+۱}+\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۱}}(x) \Rightarrow f'(۱)=۲+\frac{۳}{۴}=\frac{۱۱}{۴}$$

پس مقدار خواسته‌شدهٔ سؤال برابر است با:

$$۲+\frac{۱۱}{۴}=\frac{۱۹}{۴}=۴/۷۵$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۹۵

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲-h)-۳}{h}=-f'(۲) \Rightarrow \begin{cases} f'(۲)=-۲ \\ f(۲)=۳ \end{cases}$$

$$g'(x)=f^{۲}(\frac{۲}{x})+۲f(\frac{۲}{x}).f'(\frac{۲}{x})(\frac{-۲}{x^{۲}}\times x)$$

$$g'(۱)=f^{۲}(۲)-۴f(۲)f'(۲)=۹-۴\times ۳\times(-۲)=۳۳$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۹۶

$$f(x)=(\frac{۳x+۲}{x-۱})^{\frac{۲}{۳}}$$

$$f'(x)=\frac{۲}{۳}(\frac{۳x+۲}{x-۱})^{-\frac{۱}{۳}}\times\frac{-۵}{(x-۱)^{۲}}$$

$$f'(۲)=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{\sqrt[۳]{۸}}\times\frac{-۵}{۱}=\frac{-۵}{۳}$$

دقت کنید که مشتق $\frac{۳x+۲}{x-۱}$ به صورت زیر محاسبه شده است.

$$y=\frac{۳x+۲}{x-۱} \Rightarrow y'=\frac{۳(x-۱)-(۳x+۲)}{(x-۱)^{۲}}=\frac{-۵}{(x-۱)^{۲}}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۹۷ حاصل حد خواسته شده، همان $(fg)'(۱)$ است.

$$h(x)=f(x)g(x)=\frac{x}{۳x-۲}\times\frac{۳x+۲}{x}=\frac{۳x+۲}{۳x-۲}$$

$$h'(x)=\frac{-۱۲}{(۳x-۲)^{۲}} \Rightarrow h'(۱)=-۱۲$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۹۸ شرط پیوستگی f را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x) = f(-۱) = \lim_{x\to(-۱)^+} f(x) \Rightarrow ۲+۱ = ۳ = -a+b$$

حال شرط برابری مشتق چپ و راست را بررسی می‌کنیم:

$$f'(x) = \begin{cases} ۴x-۱ & x>۱ \text{ یا } x<-۱ \\ a & -۱\le x<۱ \end{cases}$$

$$f'_-(-۱) = f'_+(-۱) \Rightarrow a=-۵ \Rightarrow b=-۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_-(۱) = a = -۵ \\ f(۱) = a+b = -۷ \end{cases} \Rightarrow f'_-(۱)+f(۱) = -۱۲$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۹۹ برای محاسبهٔ مشتق $f(۱+\frac{۳}{x})$ در $x=۳$ کافی است $f'(۲)$ را به‌دست آوریم، از عامل صفرکنندهٔ $x-۲$ استفاده می‌کنیم:

$$f'(۲) = \frac{۱}{\sqrt{۲x^۲+۱}} = \frac{۱}{۳}$$

$$y = xf(۱+\frac{۳}{x})$$

$$y' = f(۱+\frac{۳}{x}) + x(-\frac{۳}{x^۲})f'(۱+\frac{۳}{x})$$

$$y'(۳) = f(۲) - f'(۲) = ۰ - \frac{۱}{۳} = -\frac{۱}{۳}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۰۰ g معادله : $g(x) = -۲x+۶ \Rightarrow f'(۱) = -۲$

A مختصات : $A(۱,۴)$

$$y = \frac{f(x)}{x-g(x)} = \frac{f(x)}{۳x-۶}$$

$$y' = \frac{f'(x)(۳x-۶) - ۳f(x)}{(۳x-۶)^۲}$$

$$y'(۱) = \frac{-۳f'(۱)-۳f(۱)}{۹} = \frac{۶-۱۲}{۹} = \frac{-۲}{۳}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۰۱ ابتدا دقت کنید که:

$$(fog)'(x) = g'(x).f'(g(x))$$

$$(fog)'(۱) = g'(۱).f'(۳) = ۵\times۲ = ۱۰$$

$$\lim_{x\to۱} \frac{\sqrt{fog(x)}-\sqrt{۵}}{x^۲-۱} = \lim_{x\to۱} \frac{fog(x)-۵}{(x-۱)\underbrace{(x+۱)}_{۲}\underbrace{(\sqrt{fog(x)}+\sqrt{۵})}_{۲\sqrt{۵}}}$$

$$= \frac{۱}{۴\sqrt{۵}}(fog)'(۱) = \frac{۱۰}{۴\sqrt{۵}} = \frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۰۲ از دو طرف فرض سوال مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=2xf(x)$$

$$f''(x)=2f(x)+2xf'(x)=2f(x)+2x\big(2xf(x)\big)=(4x^2+2)f(x)$$

$$y=f(2x)\Rightarrow y'=2f'(2x)\Rightarrow y''=4f''(2x)$$

$$\Rightarrow y''(1)=4f''(2)=4\times 18f(2)=72f(2)$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۰۳ $f'(x)=3\ ,\ g'(x)=4x+1$

تابع fog درجه دوم است، پس آهنگ متوسط آن در بازهٔ $[0,2]$ با آهنگ لحظه‌ای آن در وسط بازه یعنی $x=1$ برابر است.

$$(fog)'(2)=g'(2).f'\big(g(2)\big)=9\times 3=27$$

$$(fog)'(1)=g'(1)\times f'\big(g(1)\big)=5\times 3=15$$

اختلاف دو مقدار ۲۷ و ۱۵ برابر ۱۲ است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۰۴

x	۰/۸	۰/۹	۱	۱/۱	۱/۴
y	۵	۶	۸	۹	۱۲

می‌دانیم:

$$f'(a)\simeq\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

پس در فاصله $[0/9,1]$ داریم:

$$f'(1)\simeq\frac{8-6}{1-0/9}=20$$

و در فاصله $[1,1/1]$ داریم:

$$f'(1)=\frac{9-8}{1/1-1}=10$$

و بهترین تخمین از $f'(1)$، معدل این‌ها یعنی ۱۵ است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰۵ سعی می‌کنیم در صورت کسر تعریف مشتق را بسازیم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{4f(x)-x^2f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{4f(x)-4f(2)+4f(2)-x^2f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2^2\big(f(x)-f(2)\big)}{x-2}-\lim_{x\to 2}\frac{f(2)(x^2-2^2)}{x-2}\xrightarrow{g(x)=x^2}4f'(2)-f(2)g'(2)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f'(x)=\dfrac{4}{(2x+2)^2}\Rightarrow f'(2)=\dfrac{1}{9}\\ g'(x)=2x\Rightarrow g'(2)=2\end{cases}\Rightarrow\frac{4}{9}-\frac{4}{6}=-\frac{2}{9}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰۶ از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f^2(x)+g^2(x)=1\xrightarrow{\text{مشتق}}2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)=0\Rightarrow 2f(x)g(x)-2g(x)f(x)=0$$

مقدار مشتق به‌ازای xهای قابل قبول برابر صفر است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰۷ در تابع f، نقطه گوشه وجود دارد و در نقطه ریشهٔ قدرمطلق، مشتق‌پذیر نیست؛ بنابراین برای مشتق‌پذیر بودن $f\times g$، باید حد تابع $g(x)$ در این نقاط برابر صفر باشد، پس نتیجه می‌گیریم $x=۱$ و $x=-۴$ ریشه‌های تابع g هستند و داریم:

$$g(۱)=a+b+c=۰$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰۸ با جایگذاری f داریم:

$$g(x)=\begin{cases} ax+\frac{b}{x}+۱ & , x\geq ۲ \\ x^۲(a-\frac{b}{x^۲}) & , ۰<x<۲ \end{cases}$$

پس:

$$g'(x)=\begin{cases} a-\frac{b}{x^۲} & , x>۲ \\ ۲ax & , ۰<x<۲ \end{cases}$$

از شرط پیوستگی در $x=۲$ داریم:

$$۱+۲a+\frac{b}{۲}=۴(a-\frac{b}{۴})\Rightarrow \frac{۳b}{۲}+۱=۲a\Rightarrow ۳b+۲=۴a$$

و از شرط برابری مشتق‌های راست و چپ داریم:

$$a-\frac{b}{۴}=۴a\Rightarrow b=-۱۲a$$

از حل این دو معادلهٔ داریم:

$$\begin{cases} ۴a=۳b+۲ \\ b=-۱۲a \end{cases}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲۰}\ ,\ b=\frac{-۶}{۱۰}$$

پس:

$$a-b=\frac{۱۳}{۱۰۰}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰۹ آهنگ تغییر سوی فاصله $[۲,۲+h]$ برابر است با: $\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$

پس در تابع $f(x)=x-\frac{۱}{x}$ داریم:

$$\frac{(۲+h-\frac{۱}{۲+h})-(۲-\frac{۱}{۲})}{h}=\frac{h+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲+h}}{h}=\frac{h+\frac{h}{۲(۲+h)}}{h}\xrightarrow{h\text{ را بزنیم}}۱+\frac{۱}{۲(۲+h)}=\frac{۶}{۵}$$

$$\Rightarrow ۲(۲+h)=۵\Rightarrow ۲+h=\frac{۵}{۲}=۲/۵\Rightarrow h=۰/۵$$

حالا آهنگ لحظه‌ای در هر نقطه برابر است با: $f'(x)=۱-\frac{-۱}{x^۲}$

پس در وسط بازه $[۲,۲/۵]$ داریم:

$$f'(۲/۲۵)=۱+\frac{۱}{(۲/۲۵)^۲}=۱+\frac{۱}{\left(\frac{۹}{۴}\right)^۲}=۱+\frac{۱۶}{۸۱}=\frac{۹۷}{۸۱}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۰ از تابع مشتق می‌گیریم و برد تابع مشتق را می‌یابیم.

$$f(x)=\sqrt{x^۲+۱}\longrightarrow f'(x)=\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۱}}\rightarrow f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}$$

برای یافتن برد تابع توجه کنید که $x^۲+۱>x^۲$ پس:

$$\sqrt{x^۲+۱}>\sqrt{x^۲}\rightarrow\sqrt{x^۲+۱}>|x|$$

طرفین را بر $\sqrt{x^۲+۱}$ تقسیم می‌کنیم.

$$۱>\frac{|x|}{\sqrt{x^۲+۱}}\rightarrow\left|\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}\right|<۱\rightarrow -۱<\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}<۱$$

درنتیجه برد تابع مشتق $(-۱,۱)$ و مقدار $b-a=۲$ است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۱

		A	B	C	D
طول نقطه	x	+	−	−	+
عرض نقطه	f	−	−	−	+
شیب مماس	f'	+	−	+	+
جهت تقعر	f''	+	−	−	+
	ضرب	⊖	⊕	⊖	⊕

می‌دانیم x، در سمت راست محور عرض ⊕ و در سمت چپ آن ⊖ است. حاصل f در بالای محور x مثبت و زیر محور x منفی است. مقدار f' هر جا تابع صعودی باشد مثبت و اگر تابع نزولی باشد منفی است. f''، هرگاه تقعر f رو به بالا باشد (از چپ به راست شیب مماس‌ها زیاد شود) مثبت است و برعکس.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۲

با استفاده از مزدوج، زیر رادیکال را عوض می‌کنیم:

$$1-\sqrt{6x-x^2-8}\times\frac{1+\sqrt{6x-x^2-8}}{1+\sqrt{6x-x^2-8}}=\frac{1^2-\sqrt{(6x-x^2-8)^2}}{1+\sqrt{6x-x^2-8}}$$

$$=\frac{1-(6x-x^2-8)}{1+\sqrt{6x-x^2-8}}=\frac{x^2-6x+9}{1+\sqrt{6x-x^2-8}}=\frac{(x-3)^2}{1+\sqrt{6x-x^2-8}}$$

پس: $f(x)=\frac{|x-3|}{\sqrt{1+\sqrt{6x-x^2-8}}}$ و برای محاسبه $f'_+(3)$ و $f'_-(3)$ قدرمطلق را با ⊕ و ⊖ برمی‌داریم و داریم:

$$x>3: f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{1+\sqrt{6x-x^2-8}}}\to f'_{-1}(3)=\frac{1}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x<3: f(x)=\frac{-(x-3)}{\sqrt{1+\sqrt{6x-x^2-8}}}\to f'_-(3)=\frac{-1}{\sqrt{1+1}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

حالا با قاعده هوپیتال یا اضافه و کم کردن $f(3)$ داریم:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(3-h)-f(3+2h)}{h}=-f'_+(3)-2f'_-(3)=-\frac{\sqrt{2}}{2}+2\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۳ با اضافه و کم کردن عبارت $f(۱)$ در صورت و استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(۱+۴h)-f(۱-h)}{۲h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۱+۴h)-f(۱)\overbrace{-f(۱-h)+f(۱)}^{-(f(۱-h)-f(۱))}}{۲h}$$

$$=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۱+۴h)-f(۱)}{۴h}\times ۲-\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۱-h)-f(۱)}{h}\times\frac{۱}{۲}=۲f'_+(۱)+\frac{۱}{۲}f'_-(۱)$$

با توجه به نمودار $f'_+(۱)=\tan ۶۰^\circ=\sqrt{۳}$ و $f'_-(۱)=-\tan ۳۰^\circ=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$، پس داریم:

$$۲f'_+(۱)+\frac{۱}{۲}f'_-(۱)=۲\sqrt{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۶}=\frac{۱۱\sqrt{۳}}{۶}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۴ مقدار مشتق تابع در $x=۰$ برابر شیب خط AB است.

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{\sqrt{x^۲+۱}}=۱$$

حاصل حدهای تابع در $\pm\infty$ را نیز می‌یابیم.

$$y=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{|x|}=۱$$

$$y=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{|x|}=-۱$$

با توجه به اینکه شیب خط AB برابر یک است و از مبدأ می‌گذرد؛ بنابراین مختصات نقطهٔ $A(۱,۱)$ و $B(-۱,-۱)$ و فاصلهٔ آن‌ها برابر است با:

$$AB=\sqrt{(-۱-۱)^۲+(-۱-۱)^۲}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۵ تابع $f(x)$ به خاطر وجود $[x]$ در مخرج کسر، در $x=۱$ پیوستگی چپ و مشتق چپ نـدارد، مگـر بـه‌ازای $x=۱$ مقـدار صورت کسر صفر شود.

$$x=۱\Rightarrow (۱)^۲+a(۱)+۲=۰\Rightarrow a+۳=۰\Rightarrow a=-۳$$

حال مقدار مشتق چپ تابع در $x=۱$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'_-(۱)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{\frac{x^۲-۳x+۲}{bx+[x]}-۰}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x-۲}{bx+[x]}=\frac{-۱}{b+۰}=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow b=۳$$

برای محاسبهٔ مشتق راست تابع در $x=۱$، از تعریف آن استفاده می‌کنیم.

$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\frac{x^۲-۳x+۲}{۳x+[x]}-۰}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{(x-۱)(x-۲)}{۳x+[x]}}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x-۲}{۳x+[x]}=\frac{-۱}{۳+۱}=-\frac{۱}{۴}$$

راه دوم: برای محاسبه مشتق در $x=۱$، فقط از عامل صفرشونده صورت مشتق می‌گیریم:

$$y'=\frac{۲x-۳}{۳x+[x]}\Rightarrow f'_+(۱)=\frac{-۱}{۴}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۶ با استفاده از معادله داده‌شده داریم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-۲f(a)+f(a-h)}{h^۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{h\to ۰}\frac{f'(h+a)-f'(-h+a)}{۲h}$$

با اضافه و کم کردن $f'(a)$ داریم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f'(h+a)-f'(a)-f'(-h+a)+f'(a)}{۲h}=\frac{۱}{۲}\left(\lim_{h\to ۰}\frac{f'(h+a)-f'(a)}{h}-\frac{f'(-h+a)-f'(a)}{h}\right)$$

$$=\frac{۱}{۲}\left(\lim_{h\to ۰}\frac{f'(h+a)-f'(a)}{h}+\frac{f'(-h+a)-f'(a)}{-h}\right)=\frac{۱}{۲}(f''(a)+f''(a))=f''(a)=۲$$

حال خواسته صورت سؤال را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to a}\frac{x(f'(x)-f'(a))}{x-a}=a\times f''(a)=۲a$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۷ تابع به‌صورت $f(x)=x\left|(x-۱)(x-۲)\right|$ است، بنابراین نقاط $x=۱$ و $x=۲$ نقاط گوشه این تابع هستند. مشتق راست و چپ در این نقاط قرینه هستند. برای این نقاط داریم:

$$x=۲\to f'_+(x)=(x^۳-۳x^۲+۲x)'=۳x^۲-۶x+۲$$

$$\xrightarrow{x=۲} f'_+(۲)=۱۲-۱۲+۲=۲\Rightarrow f'_-(۲)=-۲\Rightarrow \text{اختلاف}=۴$$

$$x=۱\to f'_+(x)=(-x^۳+۳x^۲-۲x)'=-۳x^۲+۶x-۲$$

$$\xrightarrow{x=۱} f'_+(۱)=-۳+۶-۲=-۱\Rightarrow f'_-(۱)=۱\Rightarrow \text{اختلاف}=۲$$

بنابراین مجموع اختلاف‌ها برابر ۶ است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۸ شیب خط L، برابر مشتق تابع f در نقطه $x=۳$ است، پس داریم:

$$m_L\frac{۱-(-۱)}{۳}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow f'(۳)=\frac{۲}{۳}$$

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x-۳f(x)}{۱-f^۲(x)}\xrightarrow{HOP}=\lim_{x\to ۳}\frac{۱-۳f'(x)}{۰-۲f(x)f'(x)}=\frac{۱-۳(\frac{۲}{۳})}{-۲(۱)(\frac{۲}{۳})}=\frac{۳}{۴}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۹ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=۲\left|x-۱\right|-\left|x-۲\right|$ حاصل $\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۱+h)+f(۲-h)-k}{h}$ می‌شود $\frac{f(۱)+f(۲)-k}{۰}$

و چون حد موجود است باید صورت هم صفر شود، پس:

$$\left.\begin{array}{l}f(۱)=۲(۰)-۱=-۱\\ f(۲)=۲(۱)-۰=۲\end{array}\right\}\Rightarrow k=۱\qquad k=f(۱)+f(۲)$$

حال برای محاسبه حاصل حد مبهم، از قاعدهٔ هوپیتال یا تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۱+h)-f(۱)+f(۲-h)-f(۲)}{h}\xrightarrow{۱+h<۱,۲-h>۲} f'_-(۱)-f'_+(۲)$$

در تابع $f(x)=۲\left|x-۱\right|-\left|x-۲\right|$ در سمت چپ $x=۱$ داریم:

$$f(x)=۲(-x+۱)+(x-۲)=-x\Rightarrow f'_-(۱)=-۱$$

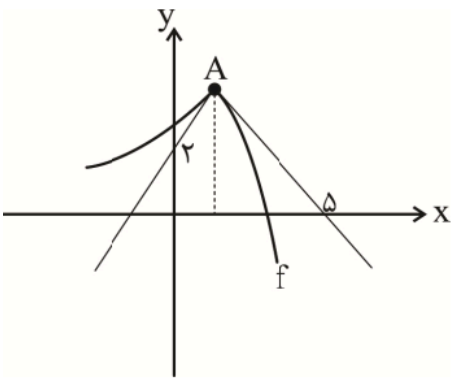
و در سمت راست $x=۲$ داریم:

$$f(x)=۲(x-۱)-(x-۲)=x\Rightarrow f'_+(۲)=۱$$

بنابراین پاسخ حد $-۱-۱=-۲$ است و جواب $k-b=۱-(-۲)=۳$ است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲۰



نیم مماس راست از $A(۱,۴)$ و $(۵,۰)$ می‌گذرد. پس شیب آن $\frac{۰-۴}{۵-۱}$ یعنی -۱ است، پس: $f'_+(۱)=-۱$

شیب نیم‌مماس چپ با دو نقطه $A(۱,۴)$ و $(۰,۲)$ برابر $\frac{۴-۲}{۱-۰}=۲$ به‌دست می‌آید پس $f'_-(۱)=۲$ حالا $\lim\limits_{h\to ۰^+}\frac{f(۱-۲h)-f(۱+۳h)}{h}$ با قاعده هوپیتال برابر $-۲f'_-(۱)-۳f'_+(۱)$ است که می‌شود $-۲(۲)-۳(-۱)$ یعنی -۱

حد چپ هم برابر $-۲f'_+(۱)-۳f'_-(۱)$ است، یعنی $-۲(-۱)-۳(۲)$ که برابر -۴ است. پس مجموعشان می‌شود -۵

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲۱

$$f(x)=۲x-|x-۱|=\begin{cases}۲x-(x-۱)\ ,x\geq ۱\\ ۲x+(x-۱)\end{cases}=\begin{cases}x+۱\ ,x\geq ۱\\ ۳x-۱\ ,x<۱\end{cases}$$

$$g(x)=ax+b+|x-۲|=\begin{cases}ax+b+x-۲\ ,x\geq ۲\\ ax+b-x+۲\ ,x<۲\end{cases}=\begin{cases}(a+۱)x+b-۲\ ,x\geq ۲\\ (a-۱)x+b+۲\ ,x<۲\end{cases}$$

$$gof(x)=g\big(f(x)\big)=\begin{cases}(a+۱)f(x)+b-۲\ ,f(x)\geq ۲\\ (a-۱)f(x)+b+۲\ ,f(x)<۲\end{cases}$$

چون f اکیداً صعودی و $f(۱)=۲$ است، داریم:

$$gof(x)=\begin{cases}(a+۱)(x+۱)+b-۲, & x\geq ۱\\ (a-۱)(۳x-۱)+b+۲, & x<۱\end{cases}$$

gof ترکیب دو تابع پیوسته است، پس خودش پیوسته است و از مشتق‌پذیری داریم:

$$y'_+(۱)=y'_-(۱)\Rightarrow a+۱=۳(a-۱)$$

پس $a=۲$ و b هر مقدار دلخواهی می‌تواند باشد.

و داریم:

$$g'(\sqrt{۵})=a+۱=۳$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲۲

$$g(x)=\left|\frac{x}{۲}\right|\sqrt[۳]{۱۰+x} \quad و \quad f(x)=\left[\frac{-۲}{x}\right](x^۲-۴)$$

$g(x)$ پیوسته است و $g(-۲)=۲$ و تابع f در $x=۲$ پیوسته است. (عامل صفرشونده در جزء صحیح ضرب شده است.)

برای مشتق fog داریم:

$$(fog)'(-۲)=g'(-۲)f'(g(-۲))$$

$$x<۰ \Rightarrow g(x)=\frac{-x}{۲}\sqrt[۳]{۱۰+x} \Rightarrow g'(x)=\frac{-۱}{۲}\sqrt[۳]{۱۰+x}-\frac{x}{۲}\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(۱۰+x)^۲}}$$

$$\Rightarrow g'(-۲)=-\frac{۱}{۲}(۲)-\frac{-۲}{۲}\frac{۱}{۳(۲)^۲}=-۱+\frac{۱}{۱۲}=\frac{-۱۱}{۱۲}$$

در سمت چپ $x=-۲$، چون g نزولی است مقدار $g(-۲)$ می‌شود ۲^+ پس $f'(g(-۲))$ می‌شود $f'(۲^+)$ که برابر است با:

$$x>۲ \Rightarrow \left[\frac{-۲}{x}\right]=-۱ \Rightarrow f(x)=۴-x^۲ \Rightarrow f'(x)=-۲x \Rightarrow f'_+(۲)=-۴$$

و جواب می‌شود $\frac{-۱۱}{۱۲}\times(-۴)=\frac{۱۱}{۳}$ که به اندازه $\frac{۱}{۳}$ از ۴ کمتر است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲۳

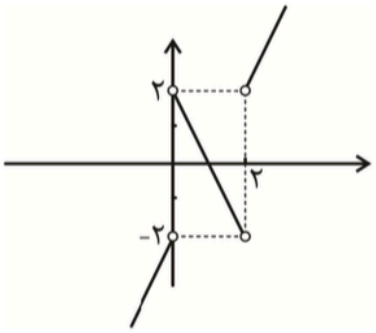
ضابطهٔ تابه $f(x)$ را به‌صورت قطعه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=|x^۲-۲x|=\begin{cases}x^۲-۲x & x<۰ \text{ یا } x>۲\\ -x^۲+۲x & ۰\le x\le ۲\end{cases}$$

از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\begin{cases}۲x-۲ & x<۰ \text{ یا } x>۲\\ -۲x+۲ & ۰<x<۲\end{cases}$$

نمودار تابع $f'(x)$ را رسم می‌کنیم.



خط $y=k$ به‌ازاء $k=\pm ۲$ نمودار تابع $f'(x)$ را قطع نمی‌کند.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲۴ فرض می‌کنیم از نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ خارج از منحنی $y=x^۲$ خط یا خط‌هایی مماس کرده‌ایم. معادلهٔ این خط $y-\beta=m(x-\alpha)$ یا $y=mx-m\alpha+\beta$ است. معادلهٔ تقاطع $y=x^۲$ و $y=mx-m\alpha+\beta$ باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

$$x^۲=mx-m\alpha+\beta\rightarrow x^۲-mx+(m\alpha-\beta)=۰\rightarrow\Delta=۰$$
$$m^۲-۴(m\alpha-\beta)=۰\rightarrow m^۲-۴m\alpha+۴\beta=۰$$

ازآنجایی‌که دو خط باید بر هم عمود باشند، پس:

$$mm'=-۱\rightarrow\frac{c}{a}=-۱\rightarrow\frac{۴\beta}{۱}=-۱\rightarrow\beta=-\frac{۱}{۴}$$

یعنی روی نمودار $f(x)=-|x-۱|+۱$ نقاطی را می‌خواهیم که عرض آن‌ها $-\frac{۱}{۴}$ باشد.

$$-|x-۱|+۱=-\frac{۱}{۴}\rightarrow|x-۱|=\frac{۵}{۴}\rightarrow x=۱\pm\frac{۵}{۴}\rightarrow\begin{cases}x=\frac{۹}{۴}\\ x=-\frac{۱}{۴}\end{cases}$$

پس دو نقطه روی نمودار $f(x)$ وجود دارد.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲۵ آهنگ متوسط تغییر $f^{-۱}$ در فاصله $(-۱,۲)$ برابر است با:

$$\frac{f^{-۱}(۲)-f^{-۱}(-۱)}{۲+۱}$$

در تابع $f(x)=x-\frac{۲}{x}\ ,\ x>۰$ داریم:

$$b=f^{-۱}(-۱)\Rightarrow f(b)=-۱\Rightarrow b-\frac{۲}{b}=-۱\Rightarrow b=۱$$
$$c=f^{-۱}(۲)\Rightarrow f(c)=c-\frac{۲}{c}=۲\Rightarrow c^۲-۲c-۲=۰\xrightarrow[C>۰]{}c=۱+\sqrt{۳}$$

پس جواب آهنگ متوسط تغییر می‌شود:

$$\frac{\sqrt{۳}+۱-۱}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲۶ شیب خط مماس بر تابع (خط L) برابر با مقدار مشتق تابع در نقطه $x=a$ است. با پیدا کردن شیب و جایگذاری یک نقطه، معادله خط را به‌دست می‌آوریم:

$$y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \xrightarrow{x=a} m=\frac{۱}{۲\sqrt{a}} \Rightarrow L: y=\frac{۱}{۲\sqrt{a}}x+b \xrightarrow{(a,\sqrt{a})} \sqrt{a}=\frac{a}{۲\sqrt{a}}+b \Rightarrow b=\frac{\sqrt{a}}{۲}$$

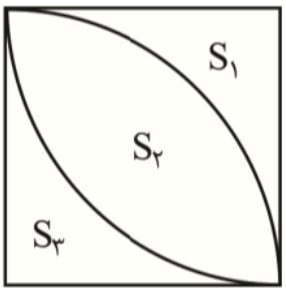
بنابران معادله خط به‌صورت $y=\frac{۱}{۲\sqrt{a}}x+\frac{\sqrt{a}}{۲}$ و عرض نقطه B برابر $\frac{\sqrt{a}}{۲}$ خواهد بود.

مساحت ذوزنقه و سپس آهنگ تغییر لحظه‌ای را حساب می‌کنیم:

$$S=a\times\frac{(\frac{\sqrt{a}}{۲}+\sqrt{a})}{۲}=\frac{۳}{۴}\times a^{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow S'=\frac{۳}{۲}\times\frac{۳}{۴}\times a^{\frac{۱}{۲}} \xrightarrow{a=\frac{۱}{۴}} S'=\frac{۳}{۲}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۹}{۱۶}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲۷ اگر مساحت‌های تشکیل‌شده در مربع به ضلع a را به‌صورت روبه‌رو نام‌گذاری کنیم، داریم:



$$S_۱=S_۳=a^۲-\frac{۱}{۴}(\pi a^۲)$$

$$S_۱+S_۲+S_۳=a^۲ \Rightarrow S_۲=a^۲-۲S_۱=\frac{\pi}{۲}a^۲-a^۲$$

مشتق می‌گیریم:

$$S_۲'=\pi a-۲a \xrightarrow{a=۲} S_۲'=۲\pi-۴$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

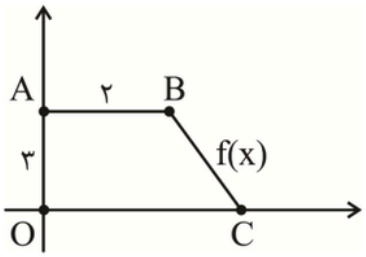
۳۲۸ تعریف مشتق سؤال شده به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+۳h^۲)-f(۲+h^۲)}{۲h^۳+h^۲}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+۳h^۲)-f(۲+h^۲)}{h^۲}=۲f'_+(۲)$$

از آنجا که طول رأس B از ذوزنقه، $x=۲$ است. پس:

$f'_+(۲):\ x=۲$ شیب خط مماس بر منحنی f در همسایگی راست $=BC$ شیب پاره خط

برای پیداکردن شیب پاره خط BC، باید طول نقطه C را داشته باشیم. از آنجا که مساحت ذوزنقه برابر با ۱۲ است، داریم:



$$S=۱۲\Rightarrow\frac{(AB+OC)\times OA}{۲}=۱۲$$

$$\Rightarrow\frac{(۲+OC)\times ۳}{۲}=۱۲\Rightarrow OC=۶\Rightarrow C(۶,۰)$$

شیب پاره‌خط واصل بین $B(۲,۳)$ و $C(۶,۰)$ برابر است با $\frac{-۳}{۴}$، پس:

$$f'_+(۲)=\frac{-۳}{۴}\Rightarrow ۲f'_+(۲)=\frac{-۳}{۲}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲۹ مختصات نقطهٔ T را به‌صورت $(x,\sqrt{x-۱})$ درنظر می‌گیریم و می‌دانیم که شیب خط مماس بر تابع در این نقطه برابر با $\frac{۱}{۲\sqrt{x-۱}}$ است.

حالا شیب خط AT واصل بین نقاط $A(۴,۰)$ و $T(x,\sqrt{x-۱})$ را می‌یابیم:

$$m_{AT}=\frac{\sqrt{x-۱}-۰}{x-۴}=\frac{\sqrt{x-۱}}{x-۴}$$

خط AT بر خط مماس بر منحنی در نقطهٔ T عمود است، پس حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر با -۱ است:

$$\frac{\sqrt{x-۱}}{x-۴}\times\frac{۱}{۲\sqrt{x-۱}}=-۱\to\frac{۱}{۲(x-۴)}=-۱\to ۲x-۸=-۱\to x=\frac{۷}{۲}\to y=\sqrt{\frac{۵}{۲}}$$

$$\to T(\frac{۷}{۲},\sqrt{\frac{۵}{۲}})$$

طول پاره‌خط AT را به‌دست می‌آوریم:

$$AT=\sqrt{(۴-\frac{۷}{۲})^۲+(\sqrt{\frac{۵}{۲}})^۲}=\sqrt{\frac{۱}{۴}+\frac{۵}{۲}}=\sqrt{\frac{۱۱}{۴}}=\frac{\sqrt{۱۱}}{۲}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳۰ دقت کنید که ضابطهٔ تابع بیانگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف داده‌شده است، پس ضابطهٔ تابع حجم مایع در حال خارج شدن از ظرف برابر است با:

$$F(t)=۴۰-V(t)\Rightarrow F(t)=۴۰-۴۰(۱-\frac{t}{۱۰۰})^{۲}$$

حالا آهنگ متوسط تغییر این تابع در بازهٔ $[۰,۱]$ را می‌خواهیم، از آنجا که تابع $F(t)$ درجهٔ دو است، این مقدار برابر با آهنگ لحظه‌ای تغییر در نقطهٔ وسط بازه است، پس کافی است $f'(\frac{۱}{۲})$ را حساب کنیم:

$$F'(t)=-۴۰(۲)(۱-\frac{t}{۱۰۰})(\frac{-۱}{۱۰۰})=\frac{۴}{۵}(۱-\frac{t}{۱۰۰})$$

$$F'(\frac{۱}{۲})=\frac{۴}{۵}(۱-\frac{\frac{۱}{۲}}{۱۰۰})=\frac{۴}{۵}-\frac{۴}{۱۰۰۰}=۰/۸-۰/۰۰۴=۰/۷۹۶$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳۱ از حد داده‌شده در مورد تابع پیوسته f نتیجه می‌شود $f(۱)=-۲$ و $\frac{f'(۱)}{۲}=\frac{۱}{۴}$ پس $f'(۱)=\frac{۱}{۲}$. (دقت کنید که تعریف مشتق $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=f'(۱)$ است و در مخرج این حد، عامل $(x+۱)$ اضافه است.) حاصل حد را با قاعده هوپیتال هم می‌توان محاسبه کرد. حالا شیب مماس بر منحنی تابع $y=xf(۶x-۲)$ برابر است با:

$$m=y'(\frac{۱}{۲})$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} y'=۱f(۶x-۲)+۶f'(۶x-۲)x \xrightarrow{x=\frac{۱}{۲}} m=f(۱)+۳f'(۱)=-۲+۳(\frac{۱}{۲})=-\frac{۱}{۲}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳۲ ضابطهٔ gof را تشکیل دهیم.

$$gof(x)=g(f(x))=\sqrt{(x+\frac{۱}{x})^{۲}-۴}=\sqrt{x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}-۲}=\sqrt{(x-\frac{۱}{x})^{۲}}$$

$$=|x-\frac{۱}{x}| \xrightarrow{۰<x<۱} =\frac{۱}{x}-x$$

پس آهنگ تغییر آن در $x=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ برابر است با:

$$y'=-\frac{۱}{x^{۲}}-۱ \xrightarrow{x=\frac{۱}{\sqrt{۲}}} -۲-۱=-۳$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳۳ برای محاسبهٔ‌حد تابع در بی‌نهایت داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x^n-12} \sim \lim_{x\to-\infty} \frac{ax}{4x^n} = \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} n=1 \\ \frac{a}{4} = \frac{1}{6} \Rightarrow a = \frac{2}{3} \end{cases}$$

پس:

$$f(x) = \frac{\frac{2}{3}x - \sqrt[3]{x^2-1}}{4x-13}$$

چون $f'(3)$ را می‌خواهیم و عبارت موجود در صورت کسر، عامل صفرکننده است، داریم:

$$f'(x) = (\frac{2}{3}x - \sqrt[3]{x^2-1})'_{x=3} \times (\frac{1}{4x-13})_{x=3}$$

$$= (\frac{2}{3} - \frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{2}{3}}(2x))_{x=3} \times (\frac{1}{4x-13})_{x=3}$$

$$= (\frac{2}{3} - \frac{1}{3}(\frac{1}{4})(6)) \times (-1) = \frac{-1}{6}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳۴ معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $(1,2)$ و $(-1,3)$، $y = \frac{-1}{2}x + \frac{5}{2}$ است. چون این خط در نقطهٔ $x=3$ بر منحنی g مماس است، داریم:

$$\begin{cases} g(3) = \frac{-1}{2}(3) + \frac{5}{2} = 1 \\ g'(3) = m_{\text{خط}} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

از طرفی، منحنی‌های f و g در نقطهٔ $x=3$ برهم مماسند، پس:

$$\begin{cases} f(3) = g(3) = 1 \\ f'(3) = g'(3) = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

حالا با داشتن $f(3)=1$ و $f'(3)=\frac{-1}{2}$، حاصل تعریف مشتق خواسته‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to3} \frac{f^2(x)+4f(x)-5}{3-x} = -(2\underbrace{f(3)}_{1}\underbrace{f'(3)}_{\frac{-1}{2}} + 4\underbrace{f'(3)}_{\frac{-1}{2}}) = -(-3) = 3$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳۵ گزینه ۳ درست است.

مشتق تابع داده‌شده را حساب می‌کنیم:

$$y' = \left((x^۲ - ۱) f(\frac{x+۱}{x-۱}) \right)' = ۲x f(\frac{x+۱}{x-۱}) + \frac{-۲}{(x-۱)^۲} f'(\frac{x+۱}{x-۱})(x^۲ - ۱)$$

با جایگذاری $x = ۳$ داریم:

$$y' = ۶f(۲) - ۴f'(۲)$$

با توجه به نمودار تابع f، $f(۲) = ۲$ است و $f'(۲)$ یا همان شیب خط مماس بر منحنی f در نقطهٔ $x = ۲$، همان شیب خط واصل بین نقاط به طول $x = ۱$ و $x = ۲$ واقع بر منحنی f است:

$$f'(۲) = \frac{۳-۲}{۱-۲} = \frac{۱}{-۱} = -۱$$

بنابراین داریم:

$$۶f(۲) - ۴f'(۲) = ۶(۲) - ۴(-۱) = ۱۶$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳۶ گزینه ۲ درست است.

می‌دانیم که تابع قدرمطلق، در ریشه‌های سادهٔ داخل قدرمطلق که در اینجا $x = ۱$ است، مشتق‌ناپذیر می‌باشد:

$$x^۳ - x^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲(x-۱) = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۰ & \text{ریشه ساده} \\ x = ۱ & \text{ریشه مضاعف} \end{cases}$$

پس $m = ۱$ می‌باشد و:

$$n = \lim_{x \to ۱^-} \frac{x^۲ f(x) - (۱^۲) f(۱)}{x - ۱}$$

حاصل حد اخیر برابر با مشتق چپ تابع $y = x^۲ f(x)$ در $x = ۱$ می‌باشد:

$$y = x^۲ \,|\, x^۳ - x^۲ \,| = x^۲ \,|\, x^۲(x-۱) \,| = x^۴ \,|\, x - ۱ \,| \xrightarrow{x \to ۱^-} x^۴(-x+۱) = -x^۵ + x^۴$$

$$y' = -۵x^۴ + ۴x^۳ \xrightarrow{x=۱} \boxed{n = -۱}$$

نهایتاً آهنگ متوسط تغییر تابع $g(x) = x^۲ - ۵x + \frac{۳}{۲}$ در بازهٔ $[۱, ۳]$ را می‌خواهیم که چون این تابع از درجهٔ دوم است، برابر با آهنگ لحظه‌ای تغییر این تابع در وسط بازه یعنی $x = ۲$ می‌باشد.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳۷ گزینه ۲ درست است.

ضابطهٔ تابع f را ساده‌تر می‌نویسیم و سپس وارون آن را مشخص می‌کنیم.

$$f(x+۱)=(x+۱)^۳-۲\Rightarrow f(t)=t^۳-۲$$

اکنون برای به‌دست آوردن $g(x)=f^{-۱}(x)+f(x+۱)-x$ باید $y=f^{-۱}(x)$ را بیابیم.

$$y=x^۳-۲\Rightarrow y+۲=x^۳\Rightarrow \sqrt[۳]{y+۲}=x\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x+۲}$$

$$g(x)=f^{-۱}(x)+f(x+۱)-x=\sqrt[۳]{x+۲}+x^۳+۳x^۲+۲x-۱$$

$$g'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۲)^۲}}+۳x^۲+۶x+۲$$

اکنون شیب خط مماس را می‌یابیم:

$$m=g^{-۱}(-۱)=\frac{۱}{۳}+۳-۶+۲=-\frac{۲}{۳}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳۸ گزینه ۴ درست است.

ریشه‌های درجهٔ یک عبارت داخل قدرمطلق $x=۰$ و $x=۴$ است. با توجه به مفروضات سؤال نقطهٔ موردنظر $x=۴$ است.

$$f'_+(۴)=\lim_{x\to ۴^+}\frac{(x-۲)\,|\,x^۲-۴x\,|-۰}{x-۴}=\lim_{x\to ۴^+}\frac{(x-۲)x\cancel{(x-۴)}}{\cancel{x-۴}}=\lim_{x\to ۴^+}x(x-۲)=۴\times ۲=۸$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)